Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
филиал МГУ в г. Севастополе
факультет компьютерной математики
кафедра вычислительной математики

УТВЕРЖДЕНО
на 2025-2026 учебный год
Методическим советом Филиала
Протокол № 10 от «28» 08 2025 г.
Заместитель директора по учебной работе
Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДЕНО
на 2026-2027 учебный год
Методическим советом Филиала
Протокол № 1 от «22» 09 2026 г.
Заместитель директора по учебной работе
Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Директор
Филиала МГУ в г. Севастополе
О.А. Шпырко
«05» 09 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:
АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Уровень высшего образования:
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

Направленность ОПОП
ОБЩИЙ

Форма обучения:
ОЧНАЯ

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры вычислительной математики
Протокол № 1 от «05» 09 2024 г.
Заведующий кафедрой
_____ (В.В.Ежов)
(подпись)

Рабочая программа одобрена
Методическим советом
Филиала МГУ в г. Севастополе
Протокол № 1 от «13» 09 2024 г.
_____ (Л.И. Теплова)
(подпись)

Севастополь, 2024

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказа МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109), приказами об утверждении изменений в ОС МГУ от 10 июня 2021 года № 609, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 29 мая 2023 года №700, от 29 мая 2023 года№ 702, от 29 мая 2023 года № 703).

Год (годы) приёма на обучение: 2026

курс – 1

семестры – 1, 2

зачетных единиц - 14

академических часов 504**,** *в т.ч.:*

лекций – 144 ч

семинарских занятий – 144 ч

Формы промежуточной аттестации – **зачёт, экзамен в I семестре**.

Форма итоговой аттестации – **зачёт, экзамен во 2 семестре**

Распределение по семестрам:

1 семестр:

зачетных единиц - 7

академических часов 252**,** *в т.ч.:*

лекций – 72 ч

семинарских занятий – 72 ч

самостоятельная работа – 108 ч

2 семестр:

зачетных единиц - 7

академических часов 252**,** *в т.ч.:*

лекций – 72 ч

семинарских занятий – 72 ч

самостоятельная работа – 108 ч

Цель и задачи учебной дисциплины

Цель курса – познакомить студентов с основными теоретическими понятиями линейной алгебры и аналитической геометрии на основе их тесной взаимосвязи, с фундаментальными методами современной алгебры и аналитической геометрии. В процессе обучения студенты должны познакомиться с комплексными числами, элементами теории множеств, групп, колец. Освоить фундаментальные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии, методы решения систем линейных уравнений, нахождения собственных векторов матриц и собственных значений. Изучить аналитическую геометрию на плоскости и в пространстве.

Задачи курса – дать фундаментальную подготовку по линейной алгебре и аналитической геометрии. В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, и приобрести навыки исследования и решения задач алгебры и аналитической геометрии.

Знать: основные понятия и результаты по линейной алгебре
(теория матриц, системы линейных уравнений, теория многочленов, линейные пространства и линейная зависимость, собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, свойства билинейных функций, основы теории групп, колец, основы теории решения задач неотрицательных матриц) и аналитической геометрии (определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений, в том числе в компьютерном моделировании геометрических объектов и явлений) . Студенты должны знать логические связи между ними.

Уметь: решать системы линейных уравнений, вычислять определители, исследовать свойства многочленов, находить собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, знать основные свойства групп, колец, решать задачи вычислительного и теоретического характера в области геометрии евклидовых и унитарных пространств, доказывать утверждения и теоремы.

Владеть: методами линейной алгебры и аналитической геометрии, теории многочленов, аппаратом теории групп и их представлений, аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов.

Универсальные компетенции
общенаучные:
владение методологией научных исследований в профессиональной области (ОНК-4);
владение фундаментальными разделами математики и информатики, необходимыми для решения научно-исследовательских и практических задач в профессиональной области (ОНК-6);
системные:
способность к творчеству, порождению инновационных идей, выдвижению самостоятельных гипотез (СК-1);
способность к поиску, критическому анализу, обобщению и систематизации научной информации, к постановке целей исследования и выбору оптимальных путей и методов их достижения (СК-2);

способность к самостоятельному обучению и разработке новых методов исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля деятельности; к инновационной научно-образовательной деятельности (СК-3);

Профессиональные компетенции:
в области научно-исследовательской деятельности:
способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-2).

Формат обучения – контактный.

.

Содержание разделов дисциплины

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Номинальные трудозатраты обучающегося**			**Всего академических часов**	**Форма текущего контроля успеваемости** (наименование)
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы		**Самостоятельная работа обучающегося, академические часы**		
	Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*			
Матрицы. Операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование и сопряжение матриц. Умножение матриц на строки и столбцы.	2	2	4	8	Тест проверка домашнего задания
Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду.	3	2	4	9	Тест проверка домашнего задания
Определитель квадратной матрицы. Перестановки.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего

Свойства определителя. Определители 2 – го, 3 –го и n-го порядков.					задания
Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц.	3	3	3	9	Опрос проверка домашнего задания
Методы вычисления определителя. Метод Гаусса. Метод рекуррентных соотношений.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего задания
Определитель Вандермонда.	2	2	2	8	Тест проверка домашнего задания
Обратная матрица. Вырожденные и невырожденные матрицы. Критерий обратимости матрицы. Метод Гаусса – Жордана построения обратной матрицы.	4	3	3	10	Тест проверка домашнего задания
Геометрические векторы. Определение, свойства. Линейные операции над векторами. Деление отрезка в данном отношении.	4	3	3	10	Тест проверка домашнего задания
Понятие вещественного линейного пространства. Определение. Примеры.	4	3	3	10	Тест проверка домашнего задания
Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания

произведения матриц. Инвариантность.					
Система линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Исследование и решение систем общего вида. Теорема Кронекера – Капели. Общее решение системы.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего задания
Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.	4	2	3	9	Тест проверка домашнего задания
Коллоквиум. Тема: матричная алгебра, определители, ранг матрицы. Обратная матрица, системы линейных алгебраических уравнений.	2		10	12	Опрос
Контрольная работа №1. Тема: матричная алгебра, определители, ранг матрицы. Обратная матрица, системы линейных алгебраических уравнений		2	6	8	
Декартовы системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Формулы преобразования координат. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Полярные, цилиндрические и сферические	2	2	2	6	Тест проверка домашнего задания

координаты.					
Скалярное произведение векторов.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего задания
Векторное и смешанное произведение векторов.	2	2	2	6	Тест проверка домашнего задания
Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми.	2	3	3	8	Тест проверка домашнего задания
Различные виды уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Пучок плоскостей. Связка плоскостей. Полупространства. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.	2	3	3	8	Тест проверка домашнего задания
Различные виды уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Связка прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой, расстояние между прямыми, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью.	3	2	4	9	Тест проверка домашнего задания

Контрольная работа №2. Тема: преобразование координат, операции над векторами, прямая на плоскости, плоскость в пространстве, прямая в пространстве		2	6	8	
Линии 2-го порядка. Эллипс, гипербола, парабола	3	4	2	9	Тест проверка домашнего задания
Поверхности 2-го порядка Эллипсоид, гиперболоиды. Конусы и цилиндры	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания
Комплексные числа. Алгебраическая форма записи. Тригонометрическая форма записи, действия над комплексными числами.	3	3	6	12	Тест проверка домашнего задания
Возведение в степень, формула Муавра.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего задания
Элементы общей алгебры. Группа. Подгруппа, смежные классы, изоморфизм групп	2	2	6	10	Тест проверка домашнего задания
Кольцо и поле	2	2	4	8	Опрос
Контрольная работа №3. Тема: Линии и поверхности второго порядка, комплексные числа, элементы общей алгебры		2	6	8	
	72	72	108	252	
Промежуточная аттестация *(зачет(ы) и (или) экзамен(ы))*		*(количество часов,** отведенных на промежуточную аттеста*			

		цию)			
2 семестр					
Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Номинальные трудозатраты обучающегося**			**Всего академических часов**	**Форма текущего контроля успеваемости** (наименование)
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы		**Самостоятельная работа обучающегося, академические часы**		
	Занятия лекционного типа*	Занятия семинарского типа*			
Линейное пространство. Определение и свойства. Линейная зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису. Изоморфизм линейных пространств.	3	3	3	9	Тест проверка домашнего задания
Линейное подпространство. Определение, способы задания. Линейная оболочка.	2	2	2	8	Тест проверка домашнего задания
Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма линейных подпространств. Дополнительное подпространство. Фактор-пространство	4	4	4	12	Опрос проверка домашнего задания
Линейное многообразие в	3	3	3	9	Контрольная работа

линейном пространстве. Прямая и гиперплоскость					
Унитарные и евклидовы пространства. Определение. Скалярное произведение векторов. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Длина вектора, угол между векторами.	3	2	3	8	Тест проверка домашнего задания
Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Матрица перехода от одного ор базиса к другому. Процесс ортогонали-зации Грама–Шмидта Матрица Грама. Ортогональные и унитарные матрицы. Подпространства Унитарного пространства. Ортогональное дополнение. Ортогональное проектирование на подпространство Разложение вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую.	3	3	6	12	Опрос проверка домашнего задания
Задача о наилучшем приближении. Линейные много-образия в евклидовом пространствах. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств.	3	3	4	10	Тест проверка домашнего задания
Контрольная работа № 1. Тема: Линейные		2	6	8	

пространства, евклидовы (унитарные) пространства					
Линейные операторы в линейном пространстве. Определение и простейшие свойства Матрица линейного оператора. Матрицы линейного оператора в различных базисах.	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания
Линейное пространство линейных операторов. Умножение линейных операторов. Образ и ядро линейного оператора. Линейные функционалы. Сопряженное пространство.	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания
Ранг и дефект линейного оператора. Обратимый линейный оператор. Обратный оператор. Критерий обратимости.	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания
Структура линейного оператора в линейном пространстве. Характеристический многочлен линейного оператора.	4	4	4	12	Тест проверка домашнего задания
Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический	4	4	5	13	Тест проверка домашнего задания

многочлен и индуцированный оператор.					
Операторы простой структуры. Треугольная форма Шура матрицы линейного оператора.	2	2	4	8	Опрос
Собственные подпространства линейного оператора. Присоединенные векторы. Корневые подпространства и корневые векторы. Нильпотентные операторы. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и обратимого.	3	3	4	10	Тест проверка домашнего задания
Жорданова нормальная форма линейного оператора.	4	3	6	13	Тест проверка домашнего задания
Коллоквиум. Тема: Линейные пространства, евклидовы (унитарные) пространства, линейные операторы в линейных пространствах, структура линейного оператора	2		10	12	Тест проверка домашнего задания
Линейные операторы в унитарном и евклидовом пространствах. Сопряжённый оператор.	2	3	4	9	Тест проверка домашнего задания
Самосопряженные операторы	2	2	4	8	Тест проверка домашнего задания
Унитарные и ортогональные операторы	2	2	4	8	Тест проверка домашнего

					задания
Нормальные операторы.	3	3	4	10	Тест проверка домашнего задания
Знакоопределенные операторы. Квадратный корень из оператора	3	2	5	10	Тест проверка домашнего задания
Контрольная работа №2. Тема: Линейные операторы		2	6	8	
Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Общий вид билинейной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа.	2	2	3	7	Тест проверка домашнего задания
Формулы Якоби. Закон инерции. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Квадратичные формы в линейном пространстве, метод вращений. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм	3	3	5	11	Опрос
Линейные нормированные пространства. Норма вектора. Нормы операторов и матриц. Операторные уравнения.	3	3	5	11	Тест проверка домашнего задания
Промежуточная аттестация *(зачет(ы) и (или) экзамен(ы))*			*(количество часов,** отведенных на промежуточную аттестацию)*		
Итого	72	72	108	216	

**В таблице долж*

но быть зафиксировано проведение текущего контроля успеваемости, который может быть реализован, например, в рамках занятий семинарского типа.
*** Часы, отводимые на проведение промежуточной аттестации, выделяются из часов самостоятельной работы обучающегося. (зачет –6 часов, экзамен – 8 часов)*

6.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

1	Матрицы. Элементарные преобразования матриц.	Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование и сопряжение матриц. Умножение матриц на строки и столбцы. Приведение матрицы к ступенчатому виду.
2	Определители матриц.	Определитель квадратной матрицы. Перестановки. Свойства определителя. Определители 2 – го, 3 –го и n-го порядков. Методы вычисления определителя. Метод Гаусса. Метод рекуррентных соотношений. Определитель Вандермонда.
3	Обратная матрица.	Вырожденные и невырожденные матрицы. Критерий обратимости матрицы. Метод Гаусса – Жордана построения обратной матрицы.
4	Геометрические векторы.	Определение, свойства. Линейные операции над векторами. Деление отрезка в данном отношении.
5	Вещественные линейные пространства	Определение. Примеры. Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Инвариантность.
6	Системы линейных алгебраических уравнений.	Правило Крамера. Исследование и решение систем общего вида. Теорема Кронекера – Капели. Общее решение системы. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
7	Системы координат	Декартовы системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Формулы преобразования координат. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.
8	Различные виды произведений векторов	Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов.
9	Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость.	Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми. Различные виды уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Пучок плоскостей. Связка плоскостей. Полупространства. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Различные виды уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в

		пространстве. Связка прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой, расстояние между прямыми, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью. Различные виды задания плоскости в пространстве.
10	Линии второго порядка. Поверхности второго порядка.	Эллипс, гипербола, парабола. Эллипсоид, гиперболоиды. Конусы и цилиндры. Их уравнения и свойства.
11	Комплексные числа.	Алгебраическая форма записи. Тригонометрическая форма записи, действия над комплексными числами. Возведение в степень, формула Муавра.
12	Элементы общей алгебры.	Основы теории групп и теории колец. Подгруппы, нормальные подгруппы. Теорема о гомоморфизмах групп. Теорема о гомоморфизмах колец. Поле. Характеристика поля. Конечные поля.
13	Линейное пространство.	Определение и свойства. Линейная зависимость системы векторов. Ранг системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису. Изоморфизм линейных пространств. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма линейных подпространств. Дополнительное подпространство. Фактор-пространство. Линейное многообразие в линейном пространстве. Прямая и гиперплоскость.
14	Унитарные и евклидовы пространства.	Определение. Скалярное произведение векторов. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Длина вектора, угол между векторами.
15	Ортогональные системы векторов.	Ортогональные системы векторов. Ортонормирован-Ный базис. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта системы векторов. Матрица Грама. Ортогональные и унитарные матрицы. Подпространства унитарного пространства. Ортогональное дополнение. Ортогональное проектирование на подпространство. Разложение вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую. Задача о наилучшем приближении. Линейные много-образия в евклидовом и унитарном пространствах. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств.
16	Линейные операторы в линейном пространстве.	Определение и простейшие свойства Матрица линейного оператора. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Линейное пространство линейных операторов. Умножение линейных операторов. Образ и ядро линейного оператора. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Ранг и дефект линейного оператора. Обратимый линейный оператор. Обратный оператор. Критерий обратимости. Структура линейного оператора в линейном пространстве. Характеристический

		многочлен линейного оператора.
17	Жорданова нормальная форма линейного оператора.	Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен и индуцированный оператор. Операторы простой структуры. Треугольная форма Шура матрицы линейного оператора. Собственные подпространства линейного оператора. Присоединенные векторы. Корневые подпространства и корневые векторы. Нильпотентные операторы. Разложение оператора в прямую сумму нильпотентного и обратимого. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
18	Линейные операторы в унитарном и евклидовом пространствах.	Сопряжённый оператор. Сопряжённый оператор. Унитарные и ортогональные операторы. Нормальные операторы. Знакоопределенные операторы. Квадратный корень из оператора.
19	Билинейные и квадратичные формы.	Матрица билинейной формы. Общий вид билинейной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Формулы Якоби. Закон инерции. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Квадратичные формы в линейном пространстве, метод вращений. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. Формулы Якоби. Закон инерции. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Квадратичные формы в линейном пространстве, метод вращений. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.
20	Линейные нормированные пространства.	Норма вектора. Нормы операторов и матриц. Операторные уравнения.

7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

на лекциях: контрольный опрос по пройденному материалу;

на семинарах: выборочная проверка выполнения домашних заданий, оценка выполнения заданий программы семинара.

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Вариант II

1. Построить ОНБ для подпространства L пространства $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, если

$$L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между вектором f и линейным подпространством $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$, если

$a_1 = (5, 3, 4, -3),\ a_2 = (1, 1, 4, 5),\ a_3 = (2, -1, 1, 2)$

$f = (1, 0, 3, 0)$.

3. Известно, что линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ переводит вектора f_1, f_2, f_3 в g_1, g_2, g_3. Найти матрицу опреатора $\mathcal{A}$ в базисе $\{f\}$ и естественном базисе, если:

$$\begin{array}{ll} f_1 = (1, 2, 7) & g_1 = (2, 3, 9) \\ f_2 = (1, 0, -1) & g_2 = (4, 3, 7) \\ f_3 = (2, 1, 1) & g_3 = (1, -2, -9) \end{array}$$

Будет ли оператор $\mathcal{A}$ изоморфизмом?

4. Найти образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ если в паре базисов f и g пространств V и W его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -2 & 12 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задает ли данный оператор сюрьективное отображение?

5. Будет ли линейным подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$ множество всех операторов, имеющих одно и то же ядро?

Вариант 1

1. Найти какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, если $L_1 \subset \mathbb{R}^4$ задано системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_1 = 0. \end{cases}$$

а L_2 является линейной оболочкой $\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3)$, где $b_1 = (2, 2, 1, 0)$, $b_2 = (3, -1, -1, 1)$, $b_3 = (9, 5, 2, 1)$.

2. Вычислить расстояние от многочлена $p(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t - 3$ до линейного многообразия $H = \{f(t) \in M_3 \mid f(1) - 3f(0) = 2\}$.

3. Построить жорданову форму матрицы C и указать соответствующий ей канонический базис, если

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве M_3 по правилу: $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) + f(-t)$. Найти базис $\ker \mathcal{A}^*$.

5. Привести квадратичную форму

$$a(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Указать выполненное при этом преобразование координат.

6. Выяснить, подобны ли матрицы

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 27 \\ 7 & -7 & 14 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение во всех пространствах считается заданным стандартным образом.

Вопросы к зачету (1 семестр)

Вопросы к экзаменам:

1 семестр

Часть 1. Линейная алгебра.

1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Элементарные преобразования матрицы. Приведение к ступенчатому виду.
3. Матрицы элементарных преобразований.
4. Перестановки
5. Определитель квадратной матрицы. Простейшие свойства.
6. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
7. Разложение определителя по строке (столбцу).
8. Невырожденные матрицы. Обратная матрица.
9. Линейное пространство. Определение, простейшие свойства. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
12. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.

13. Базис и размерность линейного пространства.
14. Координаты вектора в линейном пространстве. Свойство линейности координат.
15. Переход к другому базису в линейном пространстве.
16. Эквивалентность систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования системы уравнений.
17. Системы с квадратной невыраженной матрицей. Правило Крамера.
18. Критерий совместности и определенности системы линейных, алгебраических уравнений.
19. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений общего вида.
20. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
21. Геометрические свойства решений однородной системы уравнений. Фундаментальная система решений.
22. Геометрические свойства решений неоднородной системы уравнений.

Часть 2. Аналитическая геометрия.

1. Линейные операции над векторами и их свойства.
2. Коллинеарные и компланарные векторы. Геометрический смысл линейной зависимости.
3. Аффинная система координат. Координаты точки.
4. Проекции векторов. Свойства линейности проекций.
5. Формулы преобразования координат.
6. Преобразование прямоугольной декартовой системы координат.
7. Скалярное произведение векторов.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.
10. Уравнение линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраической линии и поверхности.
11. Уравнение прямой на плоскости, плоскости в пространстве. Критерий параллельности вектора прямой, вектора – плоскости.
12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, плоскостей в пространстве.
13. Пучок прямых на плоскости, плоскостей в пространстве.
14. Полуплоскости (полупространства) определяемые прямой на плоскости (плоскостью в пространстве).
15. Простейшие задачи на прямую и плоскость в прямоугольной декартовой системе координат.
16. Уравнение прямой в пространстве.
17. Взаимное расположение прямой и плоскости.
18. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
19. Эллипс.
20. Гипербола.
21. Парабола.
22. Приведение уравнения линии второго порядка на плоскости.
23. Классификация линий второго порядка на плоскости.
24. Метод выделения полных квадратов (метод Лагранжа).

Часть 3. Общая алгебра.

1. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности.
2. Отображения. Обратное отображение.
3. Группы. Основные свойства.

4. Подгруппы. Нормальный делитель.
5. Конечные группы. Теорема Лагранжа.
6. Изоморфизм групп.
7. Кольцо. Основные свойства.
8. Поле. Основные свойства.
9. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю.
10. Комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа.
11. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
12. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
13. Извлечение корны из комплексного числа.
14. Многочлены. Операции над многочленами.
15. Деление многочленов.
16. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида.
17. Корни многочлена. Каноническое разложение над полем комплексных чисел.
18. Формулы Виета.
19. Каноническое разложение многочлена над полем вещественных чисел.

2 семестр

1. Линейное пространство. Определение, основные свойства и примеры. Ранг и база системы векторов.
2. Базис и размерность линейного пространства
3. Линейная оболочка.
4. Изоморфизм линейных пространств.
5. Сумма и пересечение линейных подпространств.
6. Прямая сумма линейных подпространств.
7. Линейные многообразия в линейном пространстве.
8. Евклидово (и унитарное) пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
9. Длина и угол. Неравенства треугольника в евклидовом и унитарном пространствах.
10. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.
11. Существование ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации.
12. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
13. Ортогональное дополнение. Разложение вектора на ортогональную проекцию и перпендикуляр.
14. Линейные многообразия в евклидовых и унитарных пространствах.
15. Расстояние в евклидовом и унитарном пространствах. Метрические пространства.
16. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств.
17. Линейные операторы. Определение и основные свойства. Матрицы линейного оператора. Взаимно однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.
18. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
19. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.
20. Линейные формы. Сопряженное пространство. Специальное представление линейной формы в евклидовом и унитарном пространствах.
21. Произведение линейных операторов и его матрица.
22. Образ и ядро линейного оператора.
23. Обратный оператор. Критерий обратимости.
24. Инвариантные подпространства линейного. Индуцированный оператор.
25. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Основные свойства.
26. Характеристический многочлен линейного оператора.

27. Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.
28. Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.
29. Операторы простой структуры.
30. Треугольная форма Шура матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
31. Нильпотентный оператор.
32. Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора.
33. Расщепление линейного оператора.
34. Корневые подпространства. Канонический базис корневого подпространства.
35. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
36. Аннулирующие многочлены. Теорема Гамильтона-Кэли. Подобные матрицы. Критерий подобия.
37. Инвариантные подпространства минимальной размерности.
38. Сопряженный оператор. Существование и единственность сопряженного оператора.
39. Матрицы взаимно сопряженных операторов в биортогональных базисах.
40. Нормальный оператор.
41. Унитарный (ортогональный) оператор.
42. Каноническая форма унитарного оператора. Каноническая форма ортогонального оператора
43. Самосопряженный оператор.
44. Знакоопределенные операторы. Квадратный корень из оператора.
45. Полярное разложение линейного оператора.
46. Билинейные формы в линейном пространстве.
47. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Формулы Якоби.
48. Закон инерции квадратичных форм. Сигнатурное правило Якоби.
49. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
50. Полуторалинейные и эрмитовы формы.
51. Квадратичные формы в евклидовом (и унитарном) пространстве. Приведение к главным осям.
52. Одновременное приведение к главным осям пары квадратичных форм.
53. Приведенные уравнения гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве.
54. Алгебраические поверхности второго порядка в пространстве.
55. Норма вектора. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Нормированные пространства.
56. Непрерывный оператор. Ограниченный оператор.
57. Норма линейного оператора.
58. Матричные нормы линейного оператора.
59. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора.
60. Операторные уравнения. Условия разрешимости.

- для экзамена

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	2	3	4	5
Знания *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

- для зачета

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)				
Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств	Не зачтено	Зачтено		
Знания *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п.)*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

- **Перечень основной и дополнительной литературы** (учебники и учебно-методические пособия),
- **а) основная литература**

Основная литература.

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. БХВ - Петербург, 2005 г.
2. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, М., 2003 г.

- **Перечень лицензионного программного обеспечения** (при необходимости);
- http://mech.math.msu.su/department/algebra
- **Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем;**
- **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»** (при необходимости).
- **Описание материально-технического обеспечения.**

9. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в общей характеристике ОПОП.

10. Язык преподавания- русский

11. Преподаватели: Дашкова О.Ю.

12. Авторы программы: Дашкова О.Ю.