Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
филиал МГУ в г. Севастополе
факультет компьютерной математики
кафедра вычислительной математики

УТВЕРЖДЕНО
на 2025 -2026 учебный год
Методическим советом Филиала
Протокол № 10 от «28» 08 2025 г.
Заместитель директора по учебной работе
Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДЕНО
на 2026 -2027 учебный год
Методическим советом Филиала
Протокол № 1 от «22» 09 2026 г.
Заместитель директора по учебной работе
Заведующий кафедрой

**УТВЕРЖДАЮ**
**Директор**
**Филиала МГУ в г. Севастополе**
_____ О.А. Шпырко
«13» 09 2024 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**Наименование дисциплины:**
**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

**Уровень высшего образования:**
**СПЕЦИАЛИТЕТ**

**Направление подготовки:**
**03.05.02 «ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА»**

**Направленность ОПОП**
**ОБЩИЙ**

**Форма обучения:**
**ОЧНАЯ**

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры вычислительной
математики
Протокол №1 от «05» сентября 2024г.
Заведующий кафедрой
_____ (В. В. Ежов)
(подпись)

Рабочая программа одобрена
Методическим советом
Филиала МГУ в г. Севастополе
Протокол № 1 от «13» сентября 2024г.
_____ (Л.И. Теплова)
(подпись)

Севастополь, 2024

Утвержден приказом МГУ от 29 декабря 2018 года № 1780 (в редакции приказа МГУ от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404), приказами об утверждении изменений в ОС МГУ от 29 мая 2023 года №700, от 29 мая 2023 года№ 702, от 29 мая 2023 года № 703.

Год (годы) приёма на обучение: 2026

*курс* – 1

*семестр* – 1

*зачетных единиц* 3

*академических часов* 108**,** *в т.ч.:*

*лекций* – 36 ч

*семинарских занятий* – 18 ч

*самостоятельная работа* – 54 ч

*Формы промежуточной аттестации* – нет

*Форма итоговой аттестации* **– экзамен в 1 семестре**.

## Цель и задачи освоения дисциплины.

**Цель курса** – познакомить студентов с основными теоретическими понятиями линейной алгебры и аналитической геометрии на основе их тесной взаимосвязи, с фундаментальными методами современной алгебры. В процессе обучения студенты должны познакомиться с комплексными числами, элементами теории множеств, групп, колец. Освоить фундаментальные понятия линейной алгебры, методы решения систем линейных уравнений, нахождения собственных векторов матриц и собственных значений.

**Задачи курса** – дать фундаментальную подготовку по линейной алгебре. В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию и приобрести навыки исследования и решения алгебраических задач.

Содержание курса излагается по разделам, соответствующим курсу «Линейной алгебры» физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Сначала вводится понятие комплексных чисел, даётся представление о матрицах и действиях над ними. Даётся определение линейного пространства. Вводится понятие линейного оператора. Находятся собственные векторы и собственные значения.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

-***Знать*:** основные понятия и результаты по линейной алгебре (теория матриц, системы линейных уравнений, теория многочленов, линейные пространства и линейная зависимость, собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, свойства билинейных функций, основы теории групп, основы теории решения задач неотрицательных матриц).

-***Уметь***: решать системы линейных уравнений, вычислять определители, исследовать свойства многочленов, находить собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, знать основные свойства групп, решать задачи вычислительного и теоретического характера в области геометрии евклидовых и унитарных пространств, доказывать утверждения и теоремы.

- ***Владеть***: методами линейной алгебры, теории многочленов, аппаратом теории групп и их представлений, находить собственные векторы и собственные значения матрицы.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- способность создавать математические модели профессиональных типовых задач и интерпретировать полученные математические результаты, владение знаниями об ограничениях и границах применимости моделей, способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания в области физики(ОНК-5);
- владение фундаментальными разделами математики и информатики, необходимыми для решения задач в профессиональной области (ОНК-6);
- способность использовать современную вычислительную технику и специализированное программное обеспечение в научно-исследовательской работе (ИК-3);
- способность к творчеству, порождению инновационных идей, выдвижение самостоятельных гипотез (СК- 1);
- владеть современными профессиональными знаниями в области физики, математики, современных информационных технологий, компьютерных сетей, программных продуктов и ресурсов интернета и использования их для решения задач профессиональной деятельности (ПК-2).

Формат обучения – контактный.

**Содержание разделов дисциплины**

| **Наименование разделов и тем дисциплины (модуля),**<br><br>**Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Номинальные трудозатраты обучающегося** | | | **Всего академических часов** | **Форма текущего контроля успеваемости** (наименование) |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы** | | **Самостоятельная работа обучающегося, академические часы** | | |
| | Занятия лекционного типа* | Занятия семинарского типа* | | | |
| Матрицы. Операции над матрицами. Умножение матриц. Транспонирование и сопряжение матриц. Умножение матриц на строки и столбцы. | 2 | 2 | 4 | 8 | Тест проверка домашнего задания |
| Комплексные числа: построение множества комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Действия над комплексными числами. Возведение в степень. | 3 | 4 | 7 | 14 | Тест проверка домашнего задания |
| Определители и их свойства. Теорема об определителе произведения | 3 | 2 | 5 | 10 | Тест проверка домашнего задания |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| матриц. Обратная матрица. | | | | | |
| Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Инвариантность | 3 | 4 | 7 | 14 | Опрос проверка домашнего задания |
| Система линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Исследование и решение систем общего вида. Теорема Кронекера – Капели. Общее решение системы. | 3 | 2 | 5 | 10 | Тест проверка домашнего задания |
| Линейные пространства. Определение и свойства линейных пространств над полем действительных и комплексных чисел. Базис и координаты. Размерность линейного пространства. Преобразование базиса и координат. Подпространства. Линейные оболочки. Изоморфизм линейных пространств. | 2 | 2 | 4 | 8 | Тест проверка домашнего задания |
| Определения евклидова и унитарного пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис. Разложение евклидова | 4 | 4 | 8 | 16 | Тест проверка домашнего задания |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| пространства на прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств. Общий вид линейного функционала в евклидовом пространстве. | | | | | |
| Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Обратный оператор. Инвариантное подпространство линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Сопряженный, симметричный, ортогональный операторы в евклидовом пространстве, их свойства. | 4 | 4 | 8 | 16 | Тест проверка домашнего задания |
| Понятие билинейной и квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом ортогональных преобразований. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра. | 4 | 4 | 8 | 16 | Тест проверка домашнего задания |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Понятие тензора. Основные операции над тензорами. Метрический тензор. Примеры тензоров. | 4 | 4 | 8 | 16 | Тест проверка домашнего задания |
| Понятие группы. Примеры групп. Группа преобразований линейного пространства. Группа преобразований Лоренца. | 4 | 4 | 8 | 16 | Тест проверка домашнего задания |
| **Итого** | 36 | 36 | 72 | 144 | |

## 6.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Матрицы. Операции над матрицами. | Умножение матриц. Транспонирование и сопряжение матриц. Умножение матриц на строки и столбцы. |
| 2 | Комплексные числа. | Построение множества комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Действия над комплексными числами. Возведение в степень. |
| 3 | Определители. | Свойства определителей. Теорема об определителе произведения матриц. Обратная матрица. |
| 4 | Ранг матрицы. | Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Инвариантность |
| 5 | Решение систем линейных алгебраических уравнений. | Правило Крамера. Исследование и решение систем общего вида. Теорема Кронекера – Капели. Общее решение системы. |
| 6 | Линейные пространства. | Определение и свойства линейных пространств над полем действительных и комплексных чисел. Базис и координаты. Размерность линейного пространства. Преобразование базиса и координат. Подпространства. Линейные оболочки. Изоморфизм линейных пространств. |
| 7 | Евклидовы и унитарные пространства. | Определения евклидова и унитарного пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис. Разложение евклидова пространства на прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств. Общий вид линейного функционала в евклидовом пространстве. |
| 8 | Линейные операторы | Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Обратный оператор. Инвариантное подпространство линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Сопряженный, симметричный, ортогональный операторы в евклидовом пространстве, их свойства. |
| 9 | Билинейные и квадратичные формы. | Понятие билинейной и квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом ортогональных преобразований. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра. |
| 10 | Тензоры. | Понятие тензора. Основные операции над |

| | | |
|---|---|---|
| | | тензорами. Метрический тензор. Примеры тензоров. |
| 11. | Группы. | Понятие группы. Примеры групп. Группа преобразований линейного пространства. Группа преобразований Лоренца. |

**7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

на лекциях: контрольный опрос по пройденному материалу;
на семинарах: выборочная проверка выполнения домашних заданий, оценка выполнения заданий программы семинара.

**7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.**

1. Найти $A^{39}$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{39} & -\sin\frac{\pi}{39} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{39} & \cos\frac{\pi}{39} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Линейное преобразование $\varphi$ действительного векторного пространства $R^n (n \geq 3)$ задается правилом: $\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, ..., x_{n-1} + x_n, 2x_n)$. Найти собственные векторы преобразования $\varphi$, которым отвечает собственное значение 2.

**Вопросы к экзамену**

1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Элементарные преобразования матрицы. Приведение к ступенчатому виду.
3. Матрицы элементарных преобразований.
4. Перестановки
5. Определитель квадратной матрицы. Простейшие свойства.
6. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
7. Разложение определителя по строке (столбцу).
8. Невырожденные матрицы. Обратная матрица.
9. Линейное пространство. Определение, простейшие свойства. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
12. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.
13. Базис и размерность линейного пространства.
14. Координаты вектора в линейном пространстве. Свойство линейности координат.
15. Переход к другому базису в линейном пространстве.
16. Система линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера.
17. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
18. Исследование и решение линейных систем общего вида. Теорема Кронекера – Капели. Общее решение системы.

19. Евклидовы и унитарные пространства, примеры. Теорема о превращении конечномерного действительного пространства в евклидово.
20. Векторы в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского.
21. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.
22. Классификация линейных отображений. Примеры линейных отображений. Свойства линейных отображений.
23. Матрица линейного оператора, координаты вектора. Изменение матрицы оператора при замене базиса.
24. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, их свойства.
25. Билинейные и квадратичные формы. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.
26. Тензоры. Основные операции над тензорами.
27. Группы. Основные свойства. Группа преобразований Лоренца.

- для экзамена

| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания** *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п. )* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения** *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки (владения, опыт деятельности)** *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

- для зачета

| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Оценка / РО и соответствующие виды оценочных средств | Не зачтено | Зачтено | | |
| **Знания** *(виды оценочных средств: устные и письменные опросы и контрольные работы, тесты, и т.п. )* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения** *(виды оценочных средств: практические контрольные задания, написание и защита рефератов на заданную тему и т.п.)* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки** | Отсутстви | Наличие | В целом, | Сформированные |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **(владения, опыт деятельности)** *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)* | е навыков (владений, опыта) | отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | навыки (владения), применяемые при решении задач |

**8. Ресурсное обеспечение:**

– **Перечень основной и дополнительной литературы** (учебники и учебно-методические пособия)

**Основная литература**


1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука,1974 г.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука,1966 г.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Изд-во МГУ, 1998.
4. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, М., 2003 г.
5. Муратов М.А., Островский В.Я., Самойленко Ю.С. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L). Киев, 2011.
6. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984 г.
7. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. Лань, 2008.


**Дополнительная литература**


1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971.
3. Кострикин И.А., Сенченко Д.В., Слепак Б.Э., Черемных Ю.Н. Линейная алгебра: Изд-во МГУ, 1990.
4. Цубербиллер О.Н. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1970.
5. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: Наука, 1956.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.


**Перечень лицензионного программного обеспечения** (при необходимости); - электронная учебно-методическая система «Ownlibrari» кафедры программирования Филиала МГУ в г. Севастополе

http://mech.math.msu.su/department/algebra

– **Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем**;
– **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»** (при необходимости).
– **Описание материально-технического обеспечения.**

**9. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в общей характеристике ОПОП.**

**10. Язык преподавания- русский**

**11. Преподаватели: Дашкова О.Ю.**

**12. Авторы программы: Дашкова О.Ю.**