

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

филиал МГУ в г. Севастополе

факультет компьютерной математики

кафедра вычислительной математики

**УТВЕРЖДЕНО**  
на 20 25 - 20 26 учебный год  
Методическим советом Филиала  
Протокол № 10 от 28 . 08 2025 г.  
Заместитель директора по учебной работе  
Заведующий кафедрой



**УТВЕРЖДАЮ**

Директор  
Филиала МГУ в г. Севастополе

О.А. Шпырко

20 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Наименование дисциплины (модуля):**

**Теория вероятностей и математическая статистика**

*код и наименование дисциплины (модуля)*

**Уровень высшего образования:**

*бакалавриат*

**Направление подготовки:**

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

*(код и название направления/специальности)*

**Направленность (профиль) ОПОП:**

*(если дисциплина (модуль) относится к вариативной части программы)*

**Форма обучения:**

*очная*

*очная, очно-заочная*

Рабочая программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
вычислительной математики  
протокол № 1 от «05» сентября 2024г.  
Заведующий кафедрой

  
(подпись)

(В.В. Ежов)

Рабочая программа одобрена  
Методическим советом  
Филиала МГУ в г. Севастополе  
Протокол № 1 от «13» сентября 2024г.

 (Л.И. Теплова)

(подпись)

Севастополь, 2024

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с требованиями – Образовательного стандарта, самостоятельно устанавливаемого МГУ имени М.В. Ломоносова для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего профессионального образования по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказа МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109), приказами об утверждении изменений в ОС МГУ от 10 июня 2021 года № 609, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 29 мая 2023 года №700, от 29 мая 2023 года № 702, от 29 мая 2023 года № 703

Год (годы) приема на обучение 2023

курс – II семестры – 3, 4 зачетных  
единиц – 7 кредитов академических  
часов – 252, в т.ч.:

лекций – 72 часа, семинаров – 72  
часа, самостоятельной работы –  
108 ч.

Формы промежуточной аттестации:

зачёт в 3 семестре.

Форма итоговой аттестации: экзамен в 4 семестре.

## Оглавление

1. Наименование дисциплины, цели и задачи её освоения .....	3
2. Место дисциплины в структуре ОП .....	3
3. Требования к результатам обучения по дисциплине.....	3
4. Структура и объём учебной дисциплины .....	4
5. Рекомендуемые образовательные технологии.....	8
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине ....	8
7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и по итогам освоения дисциплины.....	9
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....	10
9. Материально-техническое обеспечение.....	11

## 1. Наименование дисциплины, цели и задачи её освоения

*Целью* освоения учебной дисциплины является обучение студентов построению математических моделей случайных явлений, изучаемых естественными науками, техническими дисциплинами, экологией, социологией и экономикой, анализу этих моделей, привитие студентам навыков интерпретации теоретико-вероятностных конструкций, понимание формальных основ дисциплины и выработка у студентов достаточного уровня вероятностной интуиции, позволяющей им осознанно переводить неформальные стохастические задачи в формальные математические задачи теории вероятностей.

Основные задачи дисциплины:

- ✦ изучение базовых теоретических положений, ✦
- получение устойчивых навыков в решении задач.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в блок *общепрофессиональной подготовки бакалавров* данного направления. Она *основывается* на следующих разделах и дисциплинах, освоенных студентами:

- математический анализ (теория пределов, непрерывность и дифференцируемость функций, интегрирование, функциональные ряды),
- математическая логика (элементы теории множеств и отображений).
- функциональный анализ (алгебра,  $\sigma$ -алгебра, интеграл Стильтьеса, различные типы сходимостей измеримых функций, гильбертовы пространства).
- алгебра и геометрия (теория матриц).

Изучение дисциплины может служить *базой* таких разделов и дисциплин, как:

- численные методы,
- статистическая физика,
- случайные процессы,
- алгоритмы и алгоритмические языки,
- вычислительные системы и др.

Знания, полученные при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», могут потребоваться при написании курсовых и дипломных работ, а также при решении научно-производственных задач после окончания ВУЗа.

Методы теории вероятностей и математической статистики широко применяются в теории надежности, теории массового обслуживания: теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Эта же дисциплина служит обоснованием и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, контроле качества продукции и для многих других целей.

## 3. Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование ряда компетенций.

*Инструментальные компетенции:* способность использовать современную вычислительную технику и специализированное программное обеспечение в научно-исследовательской работе (ИК- 4).

*Системные компетенции:*

- ✦ способность к самостоятельному обучению и разработке новых методов исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля деятельности; к инновационной научно-образовательной деятельности (СК-3);
- ✦ готовность к повышению своей профессиональной квалификации, осознание социальной значимости будущей профессии, стремление к улучшению личностных качеств (СК-4).

*Профессиональные компетенции:*

- ✦ способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, прикладной математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов и теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);
- ✦ способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-2).

*Планируемые результаты обучения по дисциплине:*

- ✦ *знать* фундаментальные понятия теории вероятностей и основные принципы статистического анализа данных;
- ✦ *уметь* составлять и использовать математические модели с учетом случайных факторов, ориентироваться в соответствующих приложениях, пользоваться специальной литературой.
- ✦ *владеть* методами статистического анализа и обработки данных

#### 4. Структура и объём учебной дисциплины

*Общая трудоемкость дисциплины составляет:*

зачетных единиц - 7,  
 академических часов – 252,  
 лекций – 72, семинаров –  
 72.

#### ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ темы	Название темы (семестр)	Количество часов			Формы текущего контроля
		Л	С	СРС	
1	Вероятностные модели (3)	18	18	27	Контр. раб.
2	Предельные теоремы теории вероятностей (3)	18	18	27	Контр. раб.
3	Статистические модели (4)	18	18	27	Контр. раб.
4	Оценивание параметров статистических моделей (4)	18	18	27	Контр. раб.

Всего часов:	72	72	108	
Промежуточная аттестация: зачёт в 3 семестре.				
Итоговая аттестация: экзамен в 4 семестре.				

#### 4.1. Содержание разделов дисциплины

##### А. План лекций

<i>№ лекции</i>	<i>Наименование темы и содержание лекции</i>	<i>Кол. часов</i>
	<b>Семестр 3</b>	
	<b>Тема 1. Вероятностные модели</b>	<b>18</b>
1	Вероятностное пространство. Определения вероятности: классическое, аксиоматическое, геометрическое.	2
2	Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.	2
3	Независимые испытания Бернулли. Предельные теоремы распределения Бернулли: закон Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Стирлинга.	2
4	Случайные величины и законы распределения. Непрерывный и дискретный варианты. Свойства плотности и функции распределения вероятностей.	2
5	Числовые характеристики случайных величин и их свойства. Условное математическое ожидание.	2
6	Функции от случайных величин и их законы распределения.	2
7	Примеры наиболее известных распределений случайных величин и их характеристики (непрерывные и дискретные).	2
8	Совокупности случайных величин. Совместная функция распределения. Критерий независимости.	2
9	Характеристические и производящие функции, их назначение и свойства.	2
	<b>Тема 2. Предельные теоремы теории вероятностей</b>	<b>18</b>
10	Виды сходимости последовательностей случайных величин: по вероятности, с вероятностью единица, в среднеквадратичном.	2
11	Интеграл Стильтьеса и его применение в теории вероятностей.	2
12	Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел.	2
13	Лемма Бореля-Кантелли. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова. Закон больших чисел в форме Хинчина.	2
14	Теоремы Хелли. Предельные теоремы для характеристических функций.	2
15	Центральная предельная теорема. Классическая формулировка.	2
16	Центральная предельная теорема. Доказательство теоремы Линдберга.	2
17	Теория безгранично делимых законов распределения. Предельная теорема.	2
18	Суммирование независимых случайных величин в случайном числе.	2
	<b>Семестр 4</b>	
	<b>Тема 3. Статистические модели</b>	<b>18</b>
19	Статистическая структура. Выборка. Статистика. Порядковые статистики. Вариационный ряд.	2
20	Выборочная функция распределения. Теоремы Гливленко и Колмогорова.	2
21	Выборочные моменты и их свойства: несмещённость, состоятельность, инвариантность к сдвигу и эффективность.	2

22	Эффективные оценки и неравенство Рао-Крамера.	4
23,24	Оптимальные оценки статистик. Теорема о единственности оптимальной оценки.	4
25,26	Достаточные статистики. Теорема факторизации.	2
27	Теорема Рао-Блэкуэлпа-Колмогорова. Полные статистики.	2
	<b>Тема 4. Оценивание параметров статистических моделей</b>	<b>18</b>
28	Точечное оценивание параметров распределений. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Процедура рекуррентного оценивания.	2
29	Асимптотические свойства выборочных моментов. Интервальное оценивание параметров распределений.	2
30	Проверка статистических гипотез. Основные определения. Лемма Неймана-Пирсона.	2
31	Распределения Пирсона, Стьюдента и Фишера-Снедекора как распределения статистик для выборок из нормального распределения.	2
32	Критерии согласия Колмогорова и $\chi$ -квадрат Пирсона.	2
33	Проверка однородности или независимости случайной выборки.	2
34	Основные понятия общей теории статистических решений. Байесовский и минимаксный подходы к задачам статистического оценивания.	2
35	Линейные модели и оценки их параметров. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов.	2
36	Линейная нормальная модель. Теорема Гаусса-Маркова.	2
	<b>Итого за 3, 4 семестры</b>	<b>72</b>

#### Б. План семинарских занятий

<i>№ семинара</i>	<i>Наименование темы и содержание семинара</i>	<i>Содержание семинаров</i>	<i>Кол. часов</i>
	<b>Тема 1. Вероятностные модели</b>		<b>18</b>
1	Вероятностное пространство. Определения вероятности: классическое, аксиоматическое, геометрическое.	Решение задач [5] стр.7-25	2
2	Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.	Решение задач [5] стр.26-44	2
3	Независимые испытания Бернулли. Предельные теоремы распределения Бернулли: закон Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Стирлинга.	Решение задач [5] стр.45-48	2
4	Случайные величины и функции распределения. Непрерывный и дискретный варианты. Свойства плотности и функции распределения вероятностей.	Решение задач [5] стр.45-48	2
5	Числовые характеристики случайных величин и их свойства. Условное математическое ожидание.	Решение задач [5] стр.66-93	2
6	Расчёт законов распределения функций случайных величин.	Решение задач [5] стр.45-48	2
7	Примеры наиболее известных распределений случайных величин и их характеристики (непрерывные и дискретные).	Решение задач [5] стр.64-65	2
8	Совокупности случайных величин. Совместная функция распределения. Критерий независимости.	Решение задач [13] стр.137-150	2

9	Характеристические и производящие функции, их свойства и применение.	Решение задач [5] стр.126-134	2
<b>Тема 2. Предельные теоремы теории вероятностей</b>			
10	Виды сходимости последовательностей случайных величин: по вероятности, с вероятностью единица, в среднеквадратичном.	Решение задач [5] стр.107-117	2
11	Интеграл Стильеса и его применение в теории вероятностей.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
12	Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел.	Решение задач [5] стр.107-125	2
13	Лемма Бореля-Кантелли. Усиленный закон больших	Изучение	2

	чисел в форме Колмогорова. Закон больших чисел в форме Хинчина.	теоретических вопросов по теме	
14	Теоремы Хелли. Предельные теоремы для характеристических функций.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
15	Центральная предельная теорема. Классическая формулировка.	Решение задач [5] стр.138-147	2
16	Центральная предельная теорема. Доказательство теоремы Линдеберга.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
17	Теория безгранично делимых законов распределения. Предельная теорема.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
18	Суммирование независимых случайных величин в случайном числе. Примеры из области финансовой математики.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
<b>Тема 3. Статистические модели</b>			<b>18</b>
19	Статистическая структура. Выборка. Статистика. Порядковые статистики. Вариационный ряд.	Решение задач [5] стр.178-179	2
20	Выборочная функция распределения. Теоремы Гливленко и Колмогорова.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
21,22	Выборочные моменты и их свойства: несмещённость, состоятельность, инвариантность к сдвигу и эффективность.	Решение задач [5] стр.178-184	4
23,24	Эффективные оценки и неравенство Рао-Крамера.	Решение задач [14] стр.184-185	4
25	Оптимальные оценки статистик. Теорема о единственности оптимальной оценки.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
26	Достаточные статистики. Теорема факторизации.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
27	Теорема Рао-Блэкуэлпа-Колмогорова. Полные статистики.	Изучение теоретических вопросов по теме	2

<b>Тема 4. Оценивание параметров статистических моделей</b>			<b>18</b>
28	Точечное оценивание параметров распределений. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Процедура рекуррентного оценивания.	Решение задач [13] стр.163-173	2
29	Асимптотические свойства выборочных моментов. Интервальное оценивание параметров распределений.	Решение задач [13] стр.174-180	2
30	Проверка статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.	Решение задач [5] стр.184-18	2
31	Распределения Пирсона, Стьюдента и Фишера-Снедекора как распределения статистик для выборок из нормального распределения.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
32	Критерии согласия Колмогорова и $\chi$ -квадрат Пирсона.	Решение задач [5] стр.184	2
33	Проверка однородности или независимости случайной выборки.	Решение задач [13] стр.206-282	2
34	Основные понятия общей теории статистических решений. Байесовский и минимаксный подходы к задачам статистического оценивания.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
35	Линейные модели и оценки их параметров. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов.	Решение задач [5] стр.181-182	2
36	Линейная нормальная модель. Теорема Гаусса-Маркова.	Изучение теоретических вопросов по теме	2
<b>Итого за 3, 4 семестры</b>			<b>72</b>

## **5. Рекомендуемые образовательные технологии**

*Технология образовательного* процесса представлена системой аудиторных занятий с преподавателем (лекции, семинары, консультации) и внеаудиторной самостоятельной работой студентов.

Планы аудиторных занятий предусматривают последовательное освоение теоретического и практического материала от простого к сложному. С этой целью составляются конспекты лекций, накапливается набор решаемых задач, выполняются контрольные задания промежуточного контроля. Итоговый контроль предполагается в виде экзамена по всей дисциплине.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

*Виды самостоятельной работы студентов:*

- подготовка к лекциям,
- подготовка к семинарам,
- подготовка к промежуточным контрольным мероприятиям,
- работа с литературой в библиотеке,
- подготовка к экзамену.

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

## **7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и по итогам освоения дисциплины.**

*Оценочные средства для текущего контроля успеваемости (опрос, к.р.):*

по результатам текущего контроля учащийся получает оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

*Оценочные средства промежуточной аттестации (зачёт):*

по результатам промежуточной аттестации учащийся получает оценки «зачтено», «не зачтено»; как правило, зачёт производится в накопительном порядке.

Контрольные работы, предусмотренные программой, проводятся на семинарах, и включают наборы задач по типу указанных в каждой теме.

*Оценочные средства итогового контроля знаний (экзамен):*

по результатам устного или письменного экзамена учащийся получает оценку «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Примерные варианты контрольных заданий из задачника Зубкова А.М., Севастьянова Б.А., Чистякова В.П. [5].

	Темы РУП	Вариант 1	Вариант 2
Контр. работа №1	1	Задачи № 1.36, 1.64, 2.43, 2.66	Задачи № 1.35, 1.65, 2.41, 1.67
Контр. работа №2	2	Задачи № 3.27, 3.101, 3.229, 4.157	Задачи № 3.28, 3.91, 3.232, 4.74
Контр. работа №3	3	Задачи № 6.5, 6.19, 6.25	Задачи № 6.6, 6.20, 6.26
Контр. работа №4	4	Задачи № 6.7, 6.35, 6.38	Задачи № 6.8, 6.36, 6.39

### *Оценивание контрольных работ*

Оценивание контрольных работ производится по следующей шкале: отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно.

Отличным является результат, когда студент решит все задачи за отведённое время. Оценка «хорошо» может быть результатом правильного решения всех задач при наличии лишь арифметических ошибок. Оценка «удовлетворительно» присваивается результату решения, ориентировочно, 50-70 процентов объёма заданий. Оценка «неудовлетворительно» присваивается результату решения менее 50 процентов объёма заданий. При любом результате студент обязан (уже во внеурочное время) зафиксировать решение всех типовых задач.

*Перечень вопросов к экзамену*

1. Схемы построения теории вероятностей. Условные вероятности и основные соотношения.
2. Формула полной вероятности и формула Байеса. Примеры.
3. Последовательности испытаний. Схема Бернулли и предельные теоремы.
4. Случайные величины и функции распределения. Примеры известных распределений (дискретных и непрерывных).
5. Распределение функций от случайных величин. Примеры.
6. Совместное распределение нескольких случайных величин.
7. Числовые характеристики случайных величин и их свойства.
8. Производящие и характеристические функции и их применение.
9. Теоремы Хелли. Предельные теоремы для характеристических функций.
10. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.
11. Классическая центральная предельная теорема.
12. Теорема Линдеберга.
13. Случайная выборка. Эмпирическая функция распределения. Теорема Колмогорова.
14. Случайная выборка. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко.
15. Свойства оценок параметров распределений. Выборочные моменты.
16. Эффективные оценки. Неравенство Рао-Крамера.
17. Асимптотические свойства выборочных моментов.
18. Точечные оценки: метод моментов, наибольшего правдоподобия, рекуррентного оценивания.
19. Доверительное оценивание. Построение доверительных интервалов в различных случаях.
20. Определение распределений Пирсона, Фишера, Стьюдента.
21. Проверка статистических гипотез. Критерии Колмогорова и Пирсона.
22. Проверка статистических гипотез. Критерий Неймана-Пирсона.
23. Метод наименьших квадратов. Линейные модели.
24. Линейные нормальные модели. Теорема Гаусса-Маркова.
25. Оптимальные оценки функций параметров распределений.
26. Эффективные оценки функций параметров распределений.
27. Эффективные оценки функций параметров экспоненциальных распределений.
28. Достаточные статистики. Теорема факторизации.
29. Достаточные статистики. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова.
30. Статистические решающие функции. Байесовское и минимаксное решение.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

<i>№</i>	<i>Основная литература</i>	<i>Кол. экз.</i>
1	Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. - 9-е изд., исп. и доп. - М.: URSS, 2007. (Классический университетский учебник).	19
2	Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика - М.: МГУ, 1983.	5
3	Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов - 7-е изд., стереотип. - М.: Высш. шк. 2001.	20
4	Е.Н. Лукаш, П.А. Медведев, В.Ф. Пахомов. Высшая математика. Теория вероятностей: Учеб. метод. пособие для вузов - М.: МГУ, 1987.	8

<i>Дополнительная литература</i>		
7	Справочник. Ред. В.С. Королюк. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - К.: Наукова Думка, 1978.	1
8	Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х т.: Пер. с англ. Т. 1,2 - М.: Мир, 1984.	12

***Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»***

1. [www.nsu.ru/mmф/tvims/chernova/tv/](http://www.nsu.ru/mmф/tvims/chernova/tv/)
2. <http://zyurvas.narod.ru/resursy.html>
3. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/probability.htm>

## **9. Материально-техническое обеспечение**

Освоение дисциплины предполагает использование учебной аудитории для проведения лекционных занятий и семинаров с обычной доской и, в отдельных случаях, - необходимыми техническими средствами (мультимедийный проектор, экран, компьютер с установленным комплектом программ Microsoft Office).

**10. Язык преподавания:** русский.

**11. Преподаватель:**

Руновский К.В., доктор ф.м. наук, проф. кафедры вычислительной математики.

**12. Автор программы:**

Руновский К.В., доктор ф.м. наук, проф. кафедры вычислительной математики.