

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

филиал МГУ в г. Севастополе

факультет компьютерной математики

кафедра вычислительной математики

УТВЕРЖДАЮ

Директор

Филиала МГУ в г. Севастополе

О.А. Шпырко

20 \_\_\_\_ г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Наименование дисциплины (модуля):

**Прикладной функциональный анализ**

код и наименование дисциплины (модуля)

Уровень высшего образования:

**бакалавриат**

Направление подготовки:

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(код и название направления/специальности)

Направленность (профиль) ОПОП:

(если дисциплина (модуль) относится к вариативной части программы)

Форма обучения:

**очная**


**очная, очно-заочная**

Рабочая программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
вычислительной математики  
протокол № 1 от «05» сентября 2024г.  
Заведующий кафедрой

  
(подпись)

(В.В. Ежов)

Рабочая программа одобрена  
Методическим советом  
Филиала МГУ в г. Севастополе  
Протокол № 1 от «13» сентября 2024г.

  
(подпись)

(Л.И. Теплова)

Севастополь, 2024

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказа МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109), приказами об утверждении изменений в ОС МГУ от 10 июня 2021 года № 609, от 21 декабря 2021 года № 1404

Год (годы) приема на обучение 2021

Курс – 4.

Семестр – 8.

Зачетных единиц – 2.

Академических часов -36, в т.ч.:

лекций – 36 часов,

семинаров – нет

Форма промежуточной аттестации – нет

Форма итоговой аттестации – зачёт в 8 семестре.

## 1. Цели и задачи учебной дисциплины:

Прикладной функциональный анализ – это математическая наука, возникшая в начале XX века и сформировавшаяся, в основном, к 70-м годам XX века. Основные понятия и методы прикладного функционального анализа сформировались на базе понятийного аппарата функционального анализа и тех задач математического анализа, вариационного исчисления, теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории приближений и др., для решения которых этот аппарат был развит. Сущность прикладного функционального анализа состоит в формулировке исходной задачи из указанных выше областей математики в объектной среде функционального анализа (пространства, функционалы, операторы), применении методов, подходов и результатов, полученных на этом уровне абстракции, с последующим ее «исключением» в изначальную объектную среду. Такой подход позволил решить многие задачи из разных областей математики с помощью единого универсального подхода. Методы прикладного функционального анализа являются сегодня важным математическим аппаратом и при решении многих технических задач.

Целью курса является знакомство с важнейшими понятиями и основным аппаратом классического прикладного функционального анализа и его применениями в теории интегральных уравнений, теории обобщенных функций и конструктивной теории функций.

дать современное представление об основах анализа в бесконечномерных линейных пространствах, обобщающего как теорию линейных операторов в конечномерных пространствах, так и понятие предела последовательности и функций и других понятий, конечномерного анализа; показать применение основных понятий и методов функционального анализа к различным областям математики, таким как: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, выпуклый анализ, оптимальное управление и др.; научить магистрантов основополагающим принципам и фактам функционального анализа, показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения и применения современных методов непрерывного анализа.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Теория функций комплексного переменного входит в базовую часть блока общепрофессиональной подготовки ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА, установленного Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова для реализуемых образовательных программ высшего профессионального образования по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» образовательной программы. Структурно-методическое место дисциплины предполагает её дальнейшее применение в таких курсах, в частности, как оптимальное управление, теория вероятностей, математическая статистика, уравнения математической физики, теория приближений. Перед курсом прикладного функционального анализа студентам необходимо изучить базовый курс функционального анализа, читаемый в предыдущем семестре, а также курсы линейной алгебры, математического анализа и теории функций комплексной переменной

## 3. Требования к результатам обучения по дисциплине.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование ряда общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

### Общекультурные компетенции:

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);
- демонстрация общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с комплексным анализом (ОК-10);
- способность использовать в научной и познавательной деятельности, а также в социальной сфере профессиональные навыки работы с информационными и компьютерными технологиями (ОК- 14);

- умение приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-16).

#### **Общепрофессиональные компетенции:**

- способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-1);
- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-2);
- способность использовать основные естественнонаучные законы для понимания окружающего мира и явлений природы (ОПК-3).

#### **Профессиональные компетенции:**

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам (ПК-1);
- способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-2);
- способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);
- способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы (ПК-12);

#### **Планируемые результаты обучения по дисциплине:**

**Знать:** основные определения и понятия курса, основные принципы и теоремы из области прикладного функционального анализа, доказательства базовых теорем и фактов.

**Уметь:** применять в исследовательской и прикладной деятельности аппарат прикладного функционального анализа, решать стандартные задачи, формулировать задачи теории дифференциальных и интегральных уравнений, конструктивной теории функций, математического анализа, дифференциальной геометрии в объектной среде прикладного функционального анализа.

**Владеть:** профессиональными знаниями касательно основных теоретических положений, принципов и методов прикладного функционального анализа, критически анализировать и излагать базовую информацию.

#### ***Знать:***

- основные определения и понятия курса (УК-1.Б).
- основные принципы и теоремы из области прикладного функционального анализа, доказательства базовых теорем и фактов.(ПК-2.Б)
- основные понятия, факты, концепции, принципы теорий естественных наук, математики и информатики; (ОПК-2.Б).

#### ***Уметь:***

- умеет анализировать и систематизировать разнородные данные, оценивать эффективность применения методов прикладного функционального анализа в профессиональной деятельности (УК-1.Б).
- понимать и применять на практике аппарат прикладного функционального анализа для решения различных задач; (ОПК-2.Б).

применять математические методы для решения практических задач, решать стандартные задачи, формулировать задачи теории дифференциальных и интегральных уравнений, конструктивной теории функций, математического анализа, дифференциальной геометрии в объектной среде прикладного функционального анализа. (ПК-2.Б).

**Владеть:**

- профессиональными знаниями касательно основных теоретических положений, принципов и методов алгебры и геометрии (ПК-2.Б).
- критически анализировать и излагать базовую информацию (ОПК-2.Б).
- владеет навыками научного поиска и практической работы с информационными источниками (УК-1.Б).

**4. Структура учебной дисциплины.**

**Общая трудоемкость дисциплины составляет:**

зачетных единиц - 2

академических часов 36

лекций - 36

семинарских занятий - 0

**ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН**

№ п/п	Название темы	Количество часов			Формы текущего контроля
		Л	С	СРС	
Раздел 1. Теория интегральных уравнений					
1.	Классификация интегральных уравнений	2	---	2	опрос
2.	Операторы Фредгольма и Гильберта-Шмидта и их основные свойства	4	---	4	опрос
3.	Уравнения с симметрическим ядром	2	---	2	опрос
4	Теоремы Фредгольма	2	---	2	опрос
5	Уравнения с вырожденным ядром	2	---	2	опрос
6	Уравнения с параметром. Метод Фредгольма	2	---	2	тест
Раздел 2. Обобщенные функции					
7.	Пространства основных (тестовых) функций	2	---	2	опрос
8.	Обобщенные функции и действия над ними	2	---	2	опрос
9.	Восстановление функции по производной	2	---	2	опрос
10.	Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций	2	---	2	опрос
11.	Преобразование Фурье обобщенных функций	2	---	2	опрос
12.	Примеры обобщенных функций и их свойства	2		2	тест
Раздел 3. Конструктивная теория функций					
13	Шкала пространств функций с	2	---	2	опрос

	интегральной метрикой				
14	Наилучшее приближение и его свойства	2	---	2	опрос
15	Линейные полиномиальные операторы и их элементарные свойства	2	---	2	опрос
16	Общий критерий сходимости линейных полиномиальных операторов	2	---	2	опрос
17	Средние Фурье: нормы, проблема сходимости	2	---	2	опрос
18	Систематизация выученного материала курса перед зачётом		---		самостоятельная работа
Всего:		36	---	36	
19					Зачет -36 ч

где: С – семинарские занятия, П – практические занятия, Л – лабораторные занятия,  
СРС – самостоятельная работа студентов.

#### 4.1. Содержание разделов дисциплины

##### А.План лекций

№ п/п	Номер занятия	Наименование темы и содержание лекции	Кол. часов
1	1-1	Классификация интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и Вольтера, первого и второго родов, однородные и неоднородные	2
2	1-2	Операторы Фредгольма и Гильберта-Шмидта. Формулировка задач теории интегральных уравнений в терминах операторов	2
3	1-3	Ограниченность и компактность оператора Гильберта-Шмидта. Условие его самосопряженности	2
4	1-4	Уравнения с симметрическим ядром. Сведение задачи к системе линейных уравнений путем применения теоремы Гильберта-Шмидта	2
5	1-5	Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма	2
6	1-6	Уравнения с вырожденным ядром. Решение конкретного примера	2
7	1-7	Интегральные уравнения с параметром. Суть метода Фредгольма	2
8	2-1	Тестовые функции: бесконечно дифференцируемые, быстро убывающие и функции с компактным носителем	2
9	2-2	Обобщенные функции как функционалы над пространствами тестовых функций. Определение основных операций	2
10	2-3	Восстановление обобщенной функции по производной	2
11	2-4	Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций. Существование решений. Примеры	2
12	2-5	Преобразование Фурье и его основные свойства	2
13	2-6	Некоторые классические обобщенные функции, подсчет их производных и преобразования Фурье	2
14	3-1	Пространства $L_p$ , неравенство Гельдера, понятие квазинормы, формы неравенства треугольника	2
15	3-2	Тригонометрические полиномы, наилучшее приближение и его свойства, теоремы Вейерштрасса и Чебышева	2

16	3-3	Линейные полиномиальные операторы (ЛПО). Их мультипликаторная форма. Частичная сумма ряда Фурье как пример ЛПО	2
17	3-4	Сходимость ЛПО. Критерий сходимости в терминах ограниченности норм в совокупности как следствие принципа Банаха-Штейнгауза	2
18	3-5	Средние Фурье: общая конструкция, нормы, примеры, сходимость в терминах преобразования Фурье генератора	2

## 5. Рекомендуемые образовательные технологии.

В процессе преподавания дисциплины используются следующие методы:

- лекции;
- семинары;
- домашние задания;
- контрольные работы;
- коллоквиум;
- консультации преподавателей;
- самостоятельная работа студентов (изучение теоретического материала, подготовка к практическим занятиям, выполнение домашних, подготовка к текущей и промежуточной аттестации).

Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом.

При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении семинаров создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

*Варианты заданий для самостоятельной работы*

№№ п/п	Задание	Часы
1.	Определение типов интегральных уравнений	2
2.	Изучение теоретического материала по операторам Фредгольма и Гильберта-Шмидта	2
3.	Решение уравнений с симметрическим ядром	6
4.	Изучение теорем Фредгольма	2
5.	Решение уравнений с вырожденным ядром	4
6.	Решение уравнений с параметром	4
7.	Изучение теоретического материала по тестовым и обобщенным функциям	6
8.	Изучение теоремы о восстановлении функции по производной	2
9.	Решение простейших дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций	6
10.	Подсчет преобразования Фурье некоторых обобщенных функций	2
11.	Исследование некоторых классических обобщенных функций и их свойств	8
12.	Определение принадлежности конкретных функций пространствам $L_p$	2
13.	Изучение свойств наилучших приближений	2
14.	Оценка норм ЛПО с помощью обобщенного неравенства Минковского, оценка норм ядер с помощью формулы суммирования Пуассона	4
15.	Изучение общего критерия сходимости ЛПО	2
16.	Исследование аппроксимационных свойств средних Фейера, Валле-Пуссена и Рогозинского	4
17.	Подготовка к зачету	14
	Итого	72

(Задачи: А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани «Теоремы и задачи функционального анализа», Москва, Наука, 1979; К. В. Руновский «Методические указания по курсу «Теория приближений и ее приложения»», Симферополь, 2011)

**7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

на лекциях: контрольный опрос по пройденному материалу, выборочная проверка выполнения домашних заданий, оценка выполнения заданий программы лекции.

*Перечень вопросов и задач к зачету*

1. Типы интегральных уравнений
2. Свойства операторов Гильберта-Шмидта
3. Методика решения уравнений с симметрическим ядром
4. Теоремы Фредгольма
5. Методика решения уравнений с вырожденным ядром
6. Метод Фредгольма решения уравнений с параметром



7. Основные пространства тестовых функций
8. Определение обобщенных функций и действий над ними
9. Теорема о восстановлении функции по производной
10. Простейшие дифференциальные уравнения в обобщенных функциях
11. Преобразование Фурье обобщенных функций
12. Пространства функций с интегральной метрикой и их свойства
13. Понятие наилучшего приближения и его основные свойства
14. Теоремы К. Вейерштрасса и Чебышева
15. Линейные полиномиальные операторы, их нормы и сходимость
16. Общий критерий сходимости
17. Частичные суммы ряда Фурье как пример ЛПО
18. Средние Фейера и их свойства
19. Средние Вале-Пуассона и их свойства
20. Средние Рогозинского и их свойства

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

### Основная литература:

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989 (и многочисленные переиздания).
2. К.В. Руновский. Методы тригонометрической аппроксимации. Саарбрюкен, Lambert Acad. Publ., 2012.

### Дополнительная литература:

1. А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. Москва, Наука, 1979 (и переиздания).
2. К.В. Руновский. Методические указания к изучению специального курса «Теория приближений и ее приложения». Часть I. Средние Фурье. Симферополь, 2011.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Освоение дисциплины предполагает использование учебной аудитории для проведения лекционных занятий и семинаров с обычной доской и, в отдельных случаях, - необходимыми техническими средствами (мультимедийный проектор, экран, компьютер с установленным комплектом программ Microsoft Office). Предполагается, что при изучении курса студент имеет право пользоваться библиотекой, имеющей указанную выше литературу, а также доступ к Интернет-ресурсам, в частности, к отечественным и зарубежным периодическим изданиям по функциональному анализу.