МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЛИАЛ МГУ В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Кафедра вычислительной математики

ПРЯШНИКОВА Полина Федоровна

МАТЕМАТИКА

для направления подготовки 37.03.01. Психология

Часть 1

Элементы математической логики и математического анализа

Учебное пособие

Севастополь – 2023

УДК 51-7:159.9
П-859

Рассмотрено на заседании Методического совета Филиала МГУ городе Севастополе и рекомендовано к печати
Протокол № _2_ от 13 июня 2024 года.

Пряшникова, П.Ф.
П-859 Математика для направления подготовки 37.03.01. «Психология» Часть 1. Элементы математической логики и математического анализа: учебное пособие / сост. П.Ф. Пряшникова – Севастополь: Филиал МГУ в г. Севастополе, 2023. – 107 с.

В учебном пособии рассмотрены основные понятия математической логики, теории множеств, вещественных чисел, функций и пределов. Изложение материала проводится на основе аксиоматического метода и современной математической символики

Материал учебного пособия предназначен для использования на лекциях, семинарах и для самостоятельной работы студентов.

Автор (составитель):
Пряшникова, П.Ф., к.т.н., доцент кафедры «Вычислительная математика» филиала МГУ в г. Севастополе

Рецензенты:

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с первой половины двадцатого века в психологии начали широко применяться математические методы. Применение математики в психологии включает этапы, представленные на рис. 1.

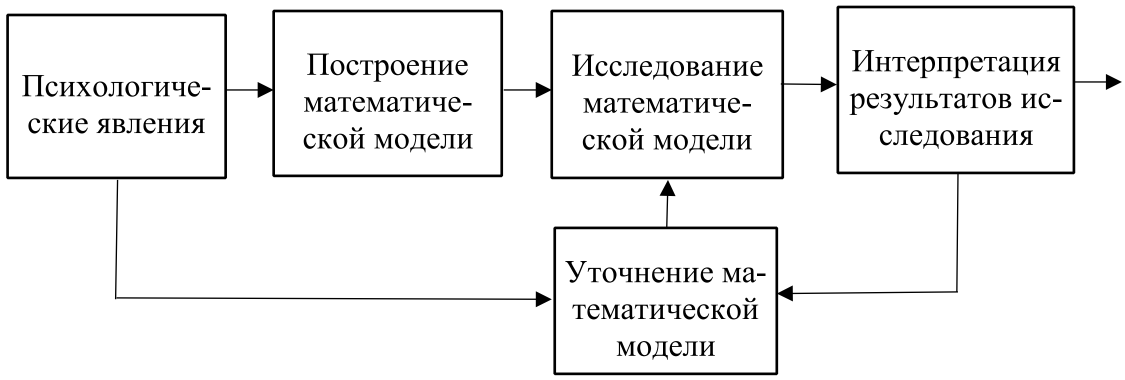


Рис. 1. Математические модели в психологии

Построение математической модели заключается в выделении из изучаемых психологических явлений основополагающих причинно-следственных связей и описание этих связей с помощью математических средств. Исследование математической модели проводится математическими методами, позволяющими получить результаты, интерпретация которых приводит к получению новых знаний в области психологии. Применение математических моделей в психологии требует от психологов знания разделов математики, используемых при построении и исследовании математических моделей, а также при интерпретации результатов исследований.

В настоящее время в психологии широко используются методы теории вероятностей, математической статистики, теории управления, теории игр, теории поля. Общематематической основой этих методов является математическая логика, теория множеств, математический анализ, линейная алгебра. Более подробно о применении математики в психологии можно прочитать в литературе [4-7].

В учебном пособии рассмотрены основные понятия математической логики, теории множеств, вещественных чисел, функций и пределов. Изложение материала проводится на основе аксиоматического метода и современной математической символики.

Изложение теоретического материала проиллюстрировано большим количеством примеров. В каждом разделе приведены задачи для самостоятельного решения.

Графики функций выполнены с помощью пакета прикладных программ MathCAD-15, что должно способствовать развитию у студентов навыков использования современных программных средств.

Материал учебного пособия предназначен для использования на лекциях, семинарах и для самостоятельной работы студентов.

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1.1 Логика как средство доказательства истинности научных теорий

Главное для любой научной теории – это ее истинность. Истинность доказывается путем наблюдения и применения логики.

Наблюдение включает изучение физических, экономических, социальных явлений, опытные данные, изучение документов и т.д. Истинность результатов наблюдения определяется точностью измерений, подлинностью документов и др. Отличие математики от остальных наук заключается в том, что вместо наблюдений используются высказывания.

Считаем интуитивно понятным лингвистический термин “предложение”.

Определение 1.1.1. Высказыванием назовем предложение, которому ставится в соответствие одно и только одно из двух значений: истинное или ложное.

Истинное значение высказывания чаще всего обозначается единицей, ложное – нулем. Будем обозначать высказывания латинскими буквами: *A*, *B*, *C* и т.д.

Синонимом высказывания является утверждение. Будем говорить, что утверждение имеет место, если это утверждение истинно.

Высказывания, определяющие первоначальные свойства математических объектов, считаются истинными по определению и образуют систему аксиом. Система аксиом должна удовлетворять свойствам непротиворечивости, категоричности (однозначности) и не избыточности.

Логика есть наука о приемлемых способах рассуждения. Истинность логики устанавливается практикой человеческого мышления. Одним из наиболее убедительным доказательством истинности считается применение правил математической логики. В математике на основании систем аксиом по правилам математической логики доказывается истинность высказываний, составляющих аксиоматические теории: алгебру, геометрию, математический анализ и другие.

Задача 1.1.1. Приведите примеры:

1) доказательства истинности научных положений психологии, устанавливаемые путем наблюдений;

2) высказываний из области психологии и элементарной математики, которые являются истинными;

3) высказываний из области психологии и элементарной математики, которые являются ложными;

4) предложений, которые не являются высказываниями;

5) аксиом алгебры;

6) аксиом геометрии;

7) доказательства истинности высказываний математики, устанавливаемые путем применения логики;

8) доказательства истинности научных положений психологии, устанавливаемые путем применения логики.

Задача 1.1.2. Может ли являться высказыванием вопросительное предложение?

1.2 Истинность высказываний математической логики.

В математической логике из заданных высказываний, называемых элементарными, можно составлять новые высказывания используя логические связки. Полученные высказывания называют составными. Высказывания, не относящиеся к составным, называют элементарными. Для построения составных высказываний обычно используют пять основных логических связок, приведенных в таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1

Логическая связка	“не”, “отрицание”	“и”, “конъюнкция”	“или”, “дизъюнкция”	“эквивалентно”, “равносильно”	“следует”, “импликация”
Обозначение	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$

Если A есть высказывание, то $\neg A$ так же есть высказывание, истинность которого определяется таблицей 1.2.2.

Таблица 1.2.2

A	0	1
$\neg A$	1	0

Если A и B есть высказывания, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B$ так же есть высказывания, истинность которых определяется таблицей 1.2.3.

Таблица 1.2.3

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$

0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Для логических связок установлен приоритет: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔, который может быть изменен путем расстановки скобок.

Следует обратить внимание на то, что истинность высказываний, включающих логические связки, в математической логике может отличаться от привычных представлений. В частности, логическая связка “или” не носит исключающего (разделительного) значения, а высказывание $A \Rightarrow B$ при ложном высказывании A истинно как при истинном, так и при ложном высказывании B.

В ряде случаев для удобства высказывание $A \wedge B$ будем записывать в виде $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ и называть системой высказываний, высказывание $A \vee B$ будем записывать в виде $\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right.$ и называть совокупностью высказываний.

Определение 1.1.2. Составное высказывание A называется тавтологией, если оно является истинным при любых значениях входящих в него элементарных высказываний.

Многие тавтологии используются для построения умозаключений, которые от истинных посылок приводят к истинным выводам. Именно такие умозаключения используются для расширения научных знаний.

Для доказательства истинности высказывания A, составленного с помощью логических связок из высказываний $B, C, \dots, D,$ следует с помощью таблиц истинности 1.2.2 и 1.2.3 показать, что высказывание A есть тавтология, то есть высказывание A истинно при любых сочетаниях значений высказываний $B, C, \dots, D$.

Для сокращения записи в дальнейшем будем пользоваться символами, приведенными в таблице 1.2.4.

Таблица 1.2.4

∃	“существует”

$\forall$	“для любого”
$\exists!$	“существует единственный”
⊲	“начало доказательства”
⊳	“конец доказательства”
$:=$	“равно по определению”

Пример 1.2.1. Докажем, что высказывания $A\Leftrightarrow(\neg A\Rightarrow 0)$ и $A\Leftrightarrow(\neg A\Rightarrow A)$ являются тавтологиями. На основании этих тавтологий проводят доказательства “от противного”. Последовательно заполним столбцы таблицы истинности 1.2.5.

Таблица 1.2.5

A	$\neg A$	$\neg A\Rightarrow 0$	$\neg A\Rightarrow A$	$A\Leftrightarrow(\neg A\Rightarrow 0)$	$A\Leftrightarrow(\neg A\Rightarrow A)$
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1

Так как в двух последних столбцах таблицы 1.2.5 записаны только единицы, то высказывания $A\Leftrightarrow(\neg \mathrm{A}\Rightarrow 0)$ и $A\Leftrightarrow(\neg A\Rightarrow A)$ являются истинными при любых значениях высказывания A, то есть являются тавтологиями. Из доказанного следует, что доказательство истинности высказывания A может заключаться в доказательстве истинности высказывания $\neg \mathrm{A}\Rightarrow 0$ или истинности высказывания $\neg A\Rightarrow A$. При $\neg A\Leftrightarrow 0$ импликации $\neg \mathrm{A}\Rightarrow 0$ и $\neg A\Rightarrow A$ истинны, поэтому требуется доказать, что эти импликации будут истинными при $\neg A\Leftrightarrow 1$. То есть доказательство истинности высказывания $A\Leftrightarrow 1$ равносильно доказательству истинности хотя бы одного из высказываний $\neg A \Rightarrow 0$ или $\neg A \Rightarrow A$ при $\neg A\Leftrightarrow 1$. Другими словами, истинность высказывания A будет доказана, если из предположения истинности противоположного высказывания $\neg A$ будет следовать либо истинность высказывания A, либо некоторое ложное высказывание.

Пример 1.2.2. Докажем, что высказывание $(A\Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A\Rightarrow B) \wedge(B\Rightarrow A))$, часто используемое для доказательства равносильности высказываний A и B, является тавтологией. Последовательно заполним столбцы таблицы истинности 1.2.6.

Таблица 1.2.6

A	B	$A\Leftrightarrow B$	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow A$	$(A\Rightarrow B) \wedge(B\Rightarrow A)$	$(A\Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A\Rightarrow B) \wedge(B\Rightarrow A))$
0	0	1	1	1	1	1

1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Так как в последнем столбце таблицы 1.2.6 записаны только единицы, то высказывание $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ истинно при любых значениях высказываний A и B, то есть является тавтологией.

Пример 1.2.3. Докажем, что высказывание $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ является тавтологией. Последовательно заполним столбцы таблицы истинности 1.2.7.

Таблица 1.2.7

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow$ C	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$	$A \Leftrightarrow$ C	$((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Так как в последнем столбце таблицы 1.2.7 записаны только единицы, то высказывание $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ истинно при любых значениях высказываний A, B и C, то есть является тавтологией.

Тавтология примера 1.2.3, а также тавтологии $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ и $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, рассмотренные в задачах 1.2.3.6, 1.2.3.7, часто используются для построения логической цепи следствий и эквивалентностей.

Задача 1.2.1. Приведите примеры высказываний из области психологии, содержащие логические связки ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔. **Задача 1.2.2.** Приведите примеры высказываний из области математики, содержащие логические связки ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔.

Задача 1.2.3. Укажите, какие из высказываний являются тавтологиями:

1) $A \vee \neg A$;
2) $\neg(A \wedge \neg A)$;
3) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$;
4) $A \Rightarrow A$;
5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;
6) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

7) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

8) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$;

9) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

10) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;

11) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$;

12) $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$;

13) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

14) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C))$;

15) $((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \vee C) \Rightarrow B)$;

16) $((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow A$;

17) $((\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$;

18) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$; 19) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$;

20) $(A \wedge B) \Rightarrow A$;

21) $A \Rightarrow (A \vee B)$;

22) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$;

23) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;

24) $((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$;

25) $((A \wedge B) \vee C) \Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$;

26) $((A \vee B) \wedge A) \Leftrightarrow A$;

27) $((A \wedge B) \vee A) \Leftrightarrow A$;

28) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;

29) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$;

30) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

31) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$;

32) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow A))$;

33) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$;

34) $(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$;

35) $(\neg A \wedge (A \vee B)) \Rightarrow B$;

36) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$;

37) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$;

38) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

39) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$;

40) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$;

41) $((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \vee C) \Rightarrow B)$;

42) $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Leftrightarrow$

$(A \Rightarrow (A \wedge C))$;

43) $A \Leftrightarrow A$;

44) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$;

45) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$;

46) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$;

47) $\neg(A \wedge (\neg A))$;

48) $((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D))$;

49) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;

50) $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$;

51) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$;

52) $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B)$;

Задача 1.2.4. Приведите примеры использования тавтологий задачи 1.2.3 в математике и психологии.

Задача 1.2.5. Для высказываний $A =$”Идет дождь”, $B =$”Я буду изучать математику”, $C =$”Я пойду в кино” запишите в словесной форме составные высказывания:

1) $A \Rightarrow (B \wedge \neg C)$; 4) $(\neg C \wedge A) \Rightarrow B$; 2) $A \Leftrightarrow (B \vee C)$; 5) $(C \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee \neg A)$.

3) $B \Leftrightarrow (\neg B \vee A)$;

Укажите, отличается ли истинность высказываний 1-5 от привычных Вам представлений. Для высказываний A, B, C приведите примеры составных высказываний, истинность которых соответствует Вашим представлениям.

РАЗДЕЛ 2. МНОЖЕСТВА. ОТНОШЕНИЯ. ФУНКЦИИ

2.1 Понятие множества

Определение 2.1.1. В существующих аксиоматических теориях множество определяется как математический объект, для которого истинными считаются некоторые высказывания, называемые аксиомами. Самая простая аксиоматика теории множеств, называемая “наивной” или “Канторовской”, включает три аксиомы:

I. множество может состоять из любых различимых объектов;
II. множество однозначно определяется входящими в него объектами;
III. любое свойство определяет множество, объекты которого, и только они, обладают этим свойством.

Объекты, входящие в множество, называются его элементами. Обычно, множества обозначают прописными буквами алфавита, а элементы множеств – строчными буквами алфавита. Если объект *x* является элементом множества X, то это записывают в виде $x \in X$. Если объект x не является элементом множества X, то это записывают в виде $x \notin X$. Для записи множества используют либо перечисление его элементов в фигурных скобках, либо указание высказывания, которое определяет множество. Например, с помощью перечисления элементов можно задать множество $X = \{1; -1\}$. Если A – высказывание, *A(x)* – обозначение того, что A является истинным для объекта x, то множество, определяемое высказыванием A, записывают в виде $\{x \mid A(x)\}$. Например, с помощью высказывания множество $X = \{1; -1\}$ можно задать в виде $X = \{x \mid x^2 = 1\}$. Синонимом утверждения “высказывание A является истинным для объекта *x*” является утверждение “объект *x* обладает свойством *A*”.

Из аксиомы I следует, что в множестве не может быть двух одинаковых элементов. Из аксиомы II следует: 1) два множества равны, тогда и только тогда, когда для всех элементов каждого из этих множеств существуют равные им элементы другого множества; 2) множество не изменяется при изменении порядка перечисления своих элементов. Равенство множеств X и Y записывают в виде $X = Y$, неравенство множеств X и Y записывают в виде $X \neq Y$.

Пример 2.1.1. Имеют место следующие равенства и неравенства множеств:

1) $\{1; -1\} = \{-1; 1\}$;

2) $\{1;\ 2\} \neq \{1;\ -2\}$;

3) $1 \neq \{1\}$;

4) $\{1;\ 0;\ -1\} = \{x \mid (x^2 - 1)x = 0\}$;

5) $\{\{\{b\}\}; \{-1\}\} =$

$\{\{-1\}; \{\{b\}\}\}$.

Аксиоматика I-III для некоторых высказываний может приводить к парадоксам, когда определение множества становится противоречивым. Известным примером противоречивого определения множества является парадокс Рассела [2, с.7]. Существуют аксиоматики теории множеств, свободные от парадоксов аксиоматики I-III [2, с.32-34]. Избегая в дальнейшем высказываний, которые приводят к парадоксам теории множеств, будем использовать аксиоматику I-III, как наиболее простую.

Определение 2.1.2. Множество X называется подмножеством множества Y, если любой элемент множества X принадлежит множеству Y. Символьная запись определения 2.1.2 имеет вид: $(X \subseteq Y) \coloneqq (\forall x((x \in X) \Rightarrow (x \in Y)))$.

Синонимами утверждения “Множество X есть подмножество множества Y” являются утверждения “Множество X включено в множество Y” и “Множество Y содержит множество X”. Выражение $X \subseteq Y$ называют отношением включения. Если $(X \subseteq Y) \wedge (X \neq Y)$, то будем записывать $X \subset Y$. В этом случае выражение $X \subset Y$ называют отношением строгого включения, а множество X называют собственным подмножеством множества Y.

Если M – множество, то по аксиоме III любое свойство $A(x)$ выделяет в M подмножество $\{x \in M \mid A(x)\}$, элементы которого обладают этим свойством. **Пример 2.1.2.** Имеют место следующие включения множеств:

1) $\{1;\ -1\} \subseteq \{-1;\ 1\}$; 4) $\{1;\ -1\} \not\subset \{-1;\ 1\}$;

2) $\{1;\ -1\} \subseteq \{-1;\ 1;\ 2\}$; 5) $\{1;\ -1\} \nsubseteq \{-1;\ 2\}$.

3) $\{1;\ -1\} \subset \{-1;\ 1;\ 2\}$;

Пример 2.1.3. Доказать, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого, то есть $(X = Y) \Leftrightarrow ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X))$.

◁ По определению $(X = Y) \coloneqq ((\forall x \in X) \Rightarrow (x \in Y)) \wedge ((\forall x \in Y) \Rightarrow (x \in X))$; $(X \subseteq Y) \coloneqq ((\forall x \in X) \Rightarrow (x \in Y))$; $(Y \subseteq X) \coloneqq ((\forall x \in Y) \Rightarrow (x \in X))$. То есть, высказывания слева и справа от знака равносильности в выражении $(X = Y) \Leftrightarrow ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X))$ совпадают, что и требовалось доказать. ▷

Определение 2.1.3. Если в задаче рассматриваются только подмножества множества X, то для этой задачи множество X называется универсальным.

Определение 2.1.4. Пустое множество, обозначаемое символом $\emptyset$, определяется высказыванием $(x \in \emptyset) \Leftrightarrow 0$, означающим, что пустое множество не содержит ни одного элемента.

Пример 2.1.4. Доказать, что пустое множество $\emptyset$ является подмножеством любого множества X.

◁По определению 1.2.1 требуемое доказательство заключается в доказательстве истинности высказывания $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in X)$. По определению 1.2.2 утверждение $x \in \emptyset$ ложно для любого x, следовательно по таблице истинности 1.2.3 импликация $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in X)$ будет всегда истинной. ▷

Обычно, пустое множество не считается собственным подмножеством произвольного множества X.

Задача 2.1.1. Выполняются ли равенства:

1) $\{a; -1\} = \{a; -1\}$;
2) $\{a; -1\} = \{-1; a\}$;
3) $\{5; -1; 2\} = \{-1; 2; 5\}$;
4) $\{\{a\}; -1\} = \{a; -1\}$;
5) $\{\{a; -1\}\} = \{-1; a\}$;
6) $\{\{a; -1\}\} = \{\{-1; a\}\}$?

Задача 2.1.2. Являются ли истинными высказывания:

1) $\{2; -1\} \subset \{-1; 2\}$;
2) $\{2; -1\} \subseteq \{-1; 2\}$;
3) $\{2; -1\} \subseteq \{\{2\}; -1\}$;
4) $\{\{2\}; -1\} \subseteq \{\{2\}; 2; -1\}$; 5) $2 \subseteq \{2; 1\}$?

Задача 2.1.3. Записать в символьном виде утверждения:

1) “Во множестве не может быть двух одинаковых элементов”;
2) “Два множества равны, тогда и только тогда, когда для всех элементов каждого из этих множеств существуют равные им элементы другого множества”.

Задача 2.1.4. Приведите примеры:

1) Задания множеств из области психологии с помощью перечисления элементов;

2) Задания множеств из области математики с помощью перечисления элементов;

3) Задания множеств из области психологии с помощью указания свойств элементов;

4) Задания множеств из области математики с помощью указания свойств элементов;

5) Множеств и их подмножеств из области психологии;

6) Множеств и их подмножеств из области математики.

2.2 Операции над множествами

Определение 2.2.1. *Объединением* множеств X и Y называется множество $X \cup Y \coloneqq \{x \mid (x \in X) \vee (x \in Y)\}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся хотя бы в одном из множеств X, Y. Геометрическая интерпретация объединения множеств приведена на рис. 2.2.1. **Пример 2.2.1.** *Объединение* множеств: 1) $\{1; -1\} \cup \{1; -1\} = \{1; -1\}$;

2) $\{1; -1\} \cup \{2; -1\} = \{1; -1;\ 2\}$;

3) $\{1; -1\} \cup \{2; -2\} = \{1; -1;\ 2;\ -2\}$;

4) $\{1; -1\} \cup \emptyset = \{1; -1\}$; 5) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Определение 2.2.2. Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y \coloneqq \{x \mid (x \in X) \wedge (x \in Y)\}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в каждом из множеств X, Y. Геометрическая интерпретация пересечения множеств приведена на рис. 2.2.2. **Пример 2.2.2.** Пересечение множеств:

1) $\{1; -1\} \cap \{1; -1\} = \{1; -1\}$;

2) $\{1; -1\} \cap \{2; -1\} = \{-1\}$;

3) $\{1; -1\} \cap \{2; -2\} = \emptyset$;

4) $\{1; -1\} \cap \emptyset = \emptyset$; 5) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

Определение 2.2.3. Разностью множеств X и Y называется множество $X \backslash Y \coloneqq \{x \mid (x \in X) \wedge (x \notin Y)\}$, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в множестве X и не содержатся в множестве Y. Геометрическая интерпретация разности множеств приведена на рис. 2.2.3. **Пример 2.2.3.** Разность множеств: 1) $\{1; -1\} \backslash \{1; -1\} = \emptyset$;

2) $\{1; -1\} \backslash \{2; -1\} = \{1\}$;

3) $\{1;\ -1\} \backslash \{2;\ -2\} = \{1;\ -1\}$;

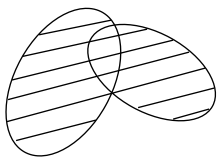
4) $\{1; -1\} \backslash \emptyset = \{1; -1\}$; 5) $\emptyset \backslash \emptyset = \emptyset$.

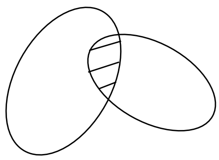
Определение 2.2.4. Разность множества X и его подмножества Y называется дополнением Y в X и обозначается $C_X Y$. Геометрическая интерпретация дополнения приведена на рис. 2.2.4.

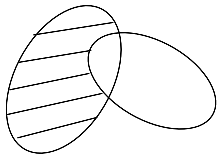
Пример 2.2.4. Дополнение множеств:

1) $C_{\{1;\,-1\}}\{1; -1\} = \emptyset$;

2) $C_{\{1;\,-1\}}\{2; -1\}$ – не определено, так как множество $\{2; -1\}$ не является подмножеством множества $\{1; -1\}$; 3) $C_{\{1;\,-1\}}\emptyset = \{1; -1\}$; 4) $C_{\{1;\,-1\}}\{1\} = \{-1\}$.







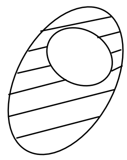


Рис. 2.2.1. Рис. 2.2.2. Рис. 2.2.3. Рис. 2.2.4.

Пример 2.2.5. Пусть X, Y и M – множества такие, что $X \subseteq M$, $Y \subseteq M$. Доказать правила де Моргана:

$$C_M(X \cup Y) = C_M X \cap C_M Y, \tag{2.2.1}$$

$$C_M(X \cap Y) = C_M X \cup C_M Y. \tag{2.2.2}$$

◁ Докажем равенство (2.2.1). Равносильные переходы $x \in C_M(X \cup Y)$ $\Leftrightarrow x \notin (X \cup Y)$ $\Leftrightarrow$ $(x \notin X) \wedge (x \notin Y)$ $\Leftrightarrow$ $(x \in C_M X) \wedge (x \in C_M Y)$ $\Leftrightarrow x \in (C_M X \cap C_M Y)$ показывают, что множества $C_M(X \cup Y)$ и $C_M X \cap C_M Y$ состоят из одних и тех же элементов, то есть эти множества равны. ▷ **Задача 2.2.1.** Найти объединение множеств:

1) $\{1; -2\} \cup \{-2; -1\}$; 4) $\{1; -2\} \cup \emptyset$;

2) $\{\{-1\}; -2\} \cup \{-2; -1\}$; 5) $\{1; 0; a\} \cup \{\{0\}\}$.

3) $\{1; -2; a\} \cup \{-2; -1; b\}$;

Задача 2.2.2. Найти пересечение множеств:

1) $\{1; -2\} \cap \{-2; -1\}$; 4) $\{1; -2\} \cap \emptyset$;

2) $\{\{-1\}; -2\} \cap \{-2; -1\}$; 5) $\{1; 0; a\} \cap \{\{0\}\}$.

3) $\{1; -2; a\} \cap \{-2; -1; b\}$;

Задача 2.2.3. Найти разность множеств:

1) $\{1; -2\} \setminus \{-2; -1\}$; 4) $\{1; -2\} \setminus \emptyset$; 2) $\{\{-1\}; -2\} \setminus \{-2; -1\}$; 5) $\emptyset \setminus \{1; -2\}$; 3) $\{1; -2; a\} \setminus \{-2; -1; b\}$; 6) $\{1; 0; a\} \setminus \{\{0\}\}$. **Задача 2.2.4.** Найти дополнение множеств:

1) $C_{\{-1;\,-2\}}\{1; -1\}$; 4) $C_{\{\{\{1\};\,-1\}\}}\{\{1\}; -1\}$;

2) $C_{\{-3;\,-1;\,a\}}\{1;\,-1;\,\{-1\}\}$; 5) $C_{\{1;\,-1;\,-3\}}\{1;\,-1;\,-2\}$.

3) $C_{\{-1;\,-2;\,-3\}}\{-2;\,-1\}$;

Задача 2.2.5. Доказать равенство (2.2.2).

Задача 2.2.6. Для множеств X, Y, Z доказать истинность высказываний:

1) $X \cup Y = Y \cup X$;

2) $X \cap Y = Y \cap X$;

3) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

4) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;

5) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

6) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;

7) $X \cup X = X$;

8) $X \cap X = X$;

9) $(X \cup Y = Y) \Leftrightarrow (X \cap Y = X)$; 10) $X \cup \emptyset = X$; 11) $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Задача 2.2.7. Пусть X, Y– есть подмножества множества Z. Доказать истинность высказываний:

1) $X \cup Y \subseteq Z$; 4) $X \cap Z = X$;

2) $X \cap Y \subseteq Z$; 5) $X \cup C_Z X = Z$; 3) $X \cup Z = Z$; 6) $X \cap C_Z X = \emptyset$.

2.3 Отношения между множествами

Важное место в психологии, как и других науках, занимает изучение связи одних величин с другими. Математически такие связи описываются как отношения на множествах.

Определение 2.3.1. Пусть в каждом из непустых множеств $X = \{x \mid P(x)\}$ и $Y = \{y \mid Q(y)\}$ выбраны элементы $x \in X$, $y \in Y$. Упорядоченной парой называется множество $\{x', y'\}$, состоящее из двух элементов, таких что x' обладает всеми свойствами элемента x и имеет дополнительное свойство – считается первым элементом упорядоченной пары, а y' обладает всеми свойствами элемента y и имеет дополнительное свойство – считается вторым элементом упорядоченной пары.

Для упорядоченной пары используют обозначение $(x,\, y)$, причем, первый элемент пары записывается на первом месте, второй элемент пары записывается на втором месте.

Следует обратить внимание на отличие множеств, состоящих из двух элементов, и упорядоченных пар. Так по определению множества $\{1;\,2\}$ и $\{2;\,1\}$ равны, в то время как упорядоченные пары $(1;\,2)$ и $(2;\,1)$ – различны.

Пример 2.3.1. Пусть $X = \{1; 0; 2\}$, $Y = \{-1; 1\}$. Из элементов множеств X и Y можно составить упорядоченные пары $(1; -1)$, $(1; 1)$, $(0; -1)$, $(0; 1)$, $(2; -1)$, $(2; 1)$.

Определение 2.3.2. Декартовым (прямым) произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар $\{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$, первый элемент которых есть элемент множества X, а второй элемент – элемент множества Y.

Декартово произведение обозначается $X \times Y$. Декартово произведение $X \times X$ обозначается X^2. В общем случае $X \times Y \neq Y \times X$.

Пример 2.3.2. Пусть $X = \{1; 0; 2\}$, $Y = \{-1; 1\}$. Декартово произведение $X \times Y = \{(1; -1), (1; 1), (0; -1), (0; 1), (2; -1), (2; 1)\}$. Декартово произведение $Y \times X = \{(-1; 1), (-1; 0), (-1; 2), (1; 1), (1; 0), (1; 2)\}$. Декартово произведение $X^2 = \{(1; 1), (1; 0), (1; 2), (0; 1), (0; 0), (0; 2), (2; 1),(2; 0), (2; 2)\}$. Декартово произведение $Y^2 = \{(-1; -1), (-1; 1), (1; -1), (1; 1)\}$.

Пример 2.3.3. Пусть $X = \{(1; 0); (2,1)\}$, $Y = \{-1; 1\}$. Декартово произведение $X \times Y = \{((1; 0); -1), ((1; 0); 1), ((2,1); -1), ((2,1); 1)\}$. Декартово произведение $Y \times X = \{(-1; (1; 0)), (-1; (2,1)), (1; (1; 0)), (1; (2,1))\}$. Декартово произведение $X^2 = \{((1; 0); (1; 0)), ((1; 0); (2,1)), ((2,1); (1; 0)), ((2,1); (2,1))\}$.

Определение 2.3.3. Отношением R между множествами X и Y называется любое подмножество декартового произведения $X \times Y$. *Областью определения отношения* R называется множество $D(R)$ первых элементов упорядоченных пар, составляющих R, *областью значений отношения* R называется множество $E(R)$ вторых элементов этих пар. Если $R \subseteq X^2$, то говорят, что *отношение R задано в множестве* X.

Вместо обозначений $D(R)$ и $E(R)$ используют, соответственно, обозначения D и E, если из контекста ясно о каком отношении R идет речь. *Вместо записи* $(x, y) \in R$ часто используют запись xRy.

Следует обратить внимание на то, что не обязательно все элементы множеств X и Y входят в упорядоченные пары отношения.

Пример 2.3.4. Пусть $X = \{1; 0; 2\}$, $Y = \{-1; 1; 5\}$. Одно из возможных отношений между множествами X и Y имеет вид $\{(1; 1), (1; 5), (0; 1)\}$. Область определения этого отношения $D = \{1; 0\}$, область значений этого отношения $E = \{1; 5\}$.

Задача 2.3.1. Составьте всевозможные упорядоченные пары для множеств:

1) $X = \{-1; 2\}$, $Y = \{1; 2\}$;
2) $X = \{2\}$, $Y = \{2\}$;
3) $X = \{-1; 2\}$, $Y = \emptyset$;
4) $X = \{\{2\}\}$, $Y = \{2\}$;
5) $X = \{2, a\}$, $Y = \{a, b\}$;
6) $X = \{2, \{2\}\}$, $Y = \{2\}$;
7) $X = \{\{2\}, 2\}$, $Y = \{2, \{2; 3\}\}$; 8) $X = \{(1; 2); (2; 3)\}$, $Y = \{3; 5\}$.

Задача 2.3.2. Запишите декартовые произведения $X \times Y$, $Y \times X$, X^2, Y^2 для множеств:

1) $X = \{-1; 2\}$, $Y = \{1; 2\}$;
2) $X = \{2\}$, $Y = \{2\}$;
3) $X = \{-1; 2\}$, $Y = \emptyset$;
4) $X = \{\{2\}\}$, $Y = \{2\}$;
5) $X = \{2, a\}$, $Y = \{a, b\}$;
6) $X = \{2, \{2\}\}$, $Y = \{2\}$;
7) $X = \{\{2\}, 2\}$, $Y = \{2, \{2; 3\}\}$;
8) $X = \{1,2\}$, $Y = \{2,1\}$;
9) $X = \{(-1; 0); (2,-1)\}$, $Y = \{-2; 5\}$.

Задача 2.3.3. Запишите всевозможные отношения между множествами $X = \{1; 0; \{2\}\}$, $Y = \{1; 5\}$. Для каждого отношения укажите область определения D и область значений E.

Задача 2.3.4. Запишите отношения между множествами X = { “человек”, “дельфин”, “муравей”, “амеба” } и Y = { “интеллект”, “навык”, “рефлекс”, “условный рефлекс”, “инстинкт” }, соответствующих вашему представлению о поведении живых существ. Указание: см. [8, с.62-63].

2.4 Функции

Часто используется следующее определение функции:

Определение 2.4.1. Функцией называется правило, по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие только один элемент y множества Y.

Как отмечается в [3, с.15] “недостатком этого определения является то обстоятельство, что функцией оказывается правило, а не множество, что неестественно, так как из школьного курса математики известно, что функции можно складывать, умножать и выполнять с ними другие арифметические операции”.

В дальнейшем будем пользоваться определением функции, свободным от этого недостатка:

Определение 2.4.2. Функцией, определенной на множестве X, называется отношение $R \subseteq X \times Y$, в котором каждому элементу области определения $D = X$, соответствует только один элемент области значений E. Синонимом термина “функция” является термин “отображение”. Для обозначения функции чаще всего используют символ f, вместо обозначения xfy обычно используют обозначение $y = f(x)$ или $x \xrightarrow{f} y$, x называют аргументом или независимой переменной, $f(x)$ называют значением функции. Вместо записи $f \subseteq X \times Y$ часто используют запись $X \xrightarrow{f} Y$ или запись $f : X \to Y$.

Отношение R есть множество упорядоченных пар в силу чего можно говорить, что функция f ставит в соответствие первому элементу каждой упорядоченной пары второй элемент этой пары. В этом смысле определение 2.4.2 похоже на определение 2.4.1. Однако, существенное отличие заключается в том, что соответствие элементов x и y в определении 2.4.1 задается не математическим объектом “правило”, а в определении 2.4.2 – математическим объектом “отношение”.

Пример 2.4.1. Записать в символьном виде условие того, что отношение $R \subseteq X \times Y$ с областью определения X и областью значений E является функцией. Решение: Отношение $R \subseteq X \times Y$ есть функция f, если $\forall\, x_1 \in X, \forall\, x_2 \in X : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$.

Пример 2.4.2. Пусть $X = \{1; 0; 2\}$, $Y = \{-1; 1; 5\}$. Множество $\{(1;1); (2;5); (0;1)\}$ является функцией. Область значений $E = \{1;5\}$ Множество $\{(1;1); (1;5); (2;5); (0;1)\}$ функцией не является, так как одному значению $x = 1$ соответствуют два значения $y' = 1$ и $y'' = 5$.

Определение 2.4.3. Отображение $f \subseteq X \times Y$ называется называется сюръективным, если $Y = E$, то есть если множество Y декартового произведения $X \times Y$ есть область значений отображения.

Пример 2.4.3. Для множеств $X = \{1; 0; 2\}$ и $Y = \{1; 5; -1\}$ задачи 2.4.1 отображение $\{(1;5); (0;1); (2;-1)\}$ является сюръективным, отображение $\{(1;5); (0;1); (2;1)\}$ не является сюръективным.

Определение 2.4.4. Отображение $f \subseteq X \times Y$ называется инъективным, если для любых элементов x_1, x_2 множества X: $(f(x_1) = f(x_2))$

$\Rightarrow$ $(x_1 = x_2)$, то есть различным элементам *области определения* отображения f соответствуют различные элементы области значений.

Пример 2.4.4. Для множеств $X = \{1; 0; 2\}$ и $Y = \{1; 5; -1\}$ задачи 2.4.1 отображение $\{(1; 5); (0; 1); (2; -1)\}$ является инъективным, отображение $\{(1; 5); (0; 1); (2; 1)\}$ не является инъективным.

Определение 2.4.5. Отображение $f \subseteq X \times Y$ называется биективным или взаимно однозначным, если это отображение сюръективно и инъективно.

Пример 2.4.5. Для множеств $X = \{1; 0; 2\}$ и $Y = \{1; 5; -1\}$ задачи 2.4.1 отображение $\{(1; 5); (0; 1); (2; -1)\}$ является биективным, отображение $\{(1; 5); (0; 1); (2; 1)\}$ не является биективным.

Определение 2.4.6. Функция φ называется *обратной по отношению к биективной функции* f, если $\varphi = \{(x; y) \mid (y; x) \in f\}$. То есть, если функция f ставит в соответствие каждому элементу $x \in D(f)$ элемент $y \in E(f)$, то обратная функция ставит в соответствие каждому элементу $\tilde{x} = y \in E(f)$ элемент $\tilde{y} = x \in D(f)$. Для обратной функции используют обозначение $\varphi = f^{-1}$.

Следствие 2.4.1. Из определения 2.4.6 следует:

a) $D(f^{-1}) = E(f)$;

b) $E(f^{-1}) = D(f)$;

c) $\forall x \in D(f)$: $f^{-1}(f(x)) = x$;

d) $\forall x \in E(f)$: $f(f^{-1}(x)) = x$.

Пример 2.4.6. Для биективной функции $f = \{(1; 5); (0; 1); (2; -1)\}$ обратной является функция $\varphi = \{(5; 1); (1; 0); (-1; 2)\}$, $E(f^{-1}) = D(f) = \{1; 0; 2\}$, $D(f^{-1}) = E(f) = \{5; 1; -1\}$. **Определение 2.4.7.** Если

1) $y = f(x)$ есть функция с *областью определения* $D(f)$ и областью значений $E(f)$,

2) $z = \varphi(y)$ есть функция с *областью определения* $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{E}(f)$ и областью значений $G(\varphi)$, то функция $z = \varphi(f(x))$ с *областью определения* $\mathrm{D}(f)$ и областью значений $G(\varphi)$ называется сложной функцией (композицией функций, суперпозицией функций); x называется независимой переменной, y называется промежуточной переменной.

Следствие 2.4.2. Из определения 2.4.7 следует, что в общем случае функции $\varphi(f(x))$ и $f(\varphi(x))$ различны.

Пример 2.4.7. Заданы функции: 1) $f = \{(1;\ 5);\ (0;\ 1);\ (2;\ 1)\}$ с областью определения $D(f) = \{1;\ 0;\ 2\}$ и областью значений $\mathrm{E(f)} = \{5;\ 1\}$; 2) $\varphi = \{(5;\ -1);\ (1;\ 2)\}$ с областью определения $D(\varphi) = \mathrm{E(f)} = \{5;\ 1\}$ и областью значений $\mathrm{E}(\varphi) = \{-1;\ 2\}$. Сложная функция $z = \varphi(f) = \{(1;\ -1);$ $(0;\ 2);\ (2;\ 2)\}$, $D(z) = D(\mathrm{f}) = \{1;\ 0;\ 2\}$, $\mathrm{E(z)} = \mathrm{E}(\varphi) = \{-1;\ 2\}$.
Сложная функция $f(\varphi)$ не определена, так как $\mathrm{D}(f) \neq \mathrm{E}(\varphi)$.

Задача 2.4.1. Для множеств $X = \{1;\ 0;\ 2\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ записать всевозможные функции. Для каждой функции указать область значений E.

Задача 2.4.2. Для множеств $X = \{(1;\ 0);\ (1{,}2)\}$ и $Y = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ записать всевозможные функции. Для каждой функции указать область значений E.

Задача 2.4.3. Для множеств $X = \{1; 0; 2\}$ и $Y = \{1; 5; -1\}$ задачи 2.4.1 указать все сюръективные отображения, определенные на X.

Задача 2.4.4. Для множеств $X = \{1;\ 2\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ указать все сюръективные отображения, определенные на X.

Задача 2.4.5. Для множеств $X = \{1;\ 0;\ 2\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ указать все инъективные отображения, определенные на X.

Задача 2.4.6. Для множеств $X = \{1;\ 0\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ указать все инъективные отображения, определенные на X.

Задача 2.4.7. Для множеств $X = \{1;\ 0;\ 2\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ указать все биективным отображения, определенные на X.

Задача 2.4.8. Для множеств $X = \{1;\ 0\}$ и $Y = \{1;\ 5;\ -1\}$ указать все биективные отображения, определенные на X.

Задача 2.4.9. Для множеств задачи 2.3.4: $X = \{$ “человек”, “дельфин”, “муравей”, “амеба” $\}$ и $Y = \{$ “интеллект”, “навык”, “рефлекс”, “условный рефлекс”, “инстинкт” $\}$ запишите примеры отношений, которые являются функциями, определенными на множестве X. Укажите, являются ли эти функции сюръективными, инъективными и биективными.

Задача 2.4.10. Для биективной функции $f = \{(-1;\ 5);\ (0;\ 1);\ (5;\ -1)\}$ записать обратную функцию. Найти множества $D(f)$, $E(f)$, $D(f^{-1})$, $E(f^{-1})$.

Задача 2.4.11. Для функций 1) $f = \{(-1; -1); (-2; -1); (3; 2)\}$ 2) $\varphi = \{(-1; -2); (2; 7)\}$ найти сложную функцию $z = \varphi(f)$.

РАЗДЕЛ 3. МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО ПОДМНОЖЕСТВА

Некорректное использование свойств множества вещественных чисел является источником часто встречаемых ошибок. Избежать этих ошибок позволяет в первую очередь знание аксиоматики вещественных чисел и умение применять аксиоматику для обоснования свойств вещественных чисел.

3.1 Аксиоматика множества вещественных чисел

Перечислим некоторые свойства вещественных чисел, хорошо известные из курса элементарной математики: 1) деление на нуль не определено; 2) $1 > 0$; 3) $1 \geq 0$; 4) $(-1) \bullet (-1) = 1$; 4) $(-1) \bullet 0 = 0$; 5) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$; 6) существует вещественное число, квадрат которого равен двум; 7) не существует вещественного числа, квадрат которого равен минус единице; 8) если a и b вещественные числа то $(a > b) \Rightarrow (a \geq b)$. Возникает естественный вопрос, какие из этих свойства являются аксиомами, истинность которых принимается без доказательства, а какие свойства являются следствием из аксиом.

Существует несколько систем аксиом, определяющих множество вещественных чисел. Будем рассматривать одну из таких систем, включающих 16 аксиом. Схематично рассматриваемые аксиомы изображены на рисунке 3.1.1.

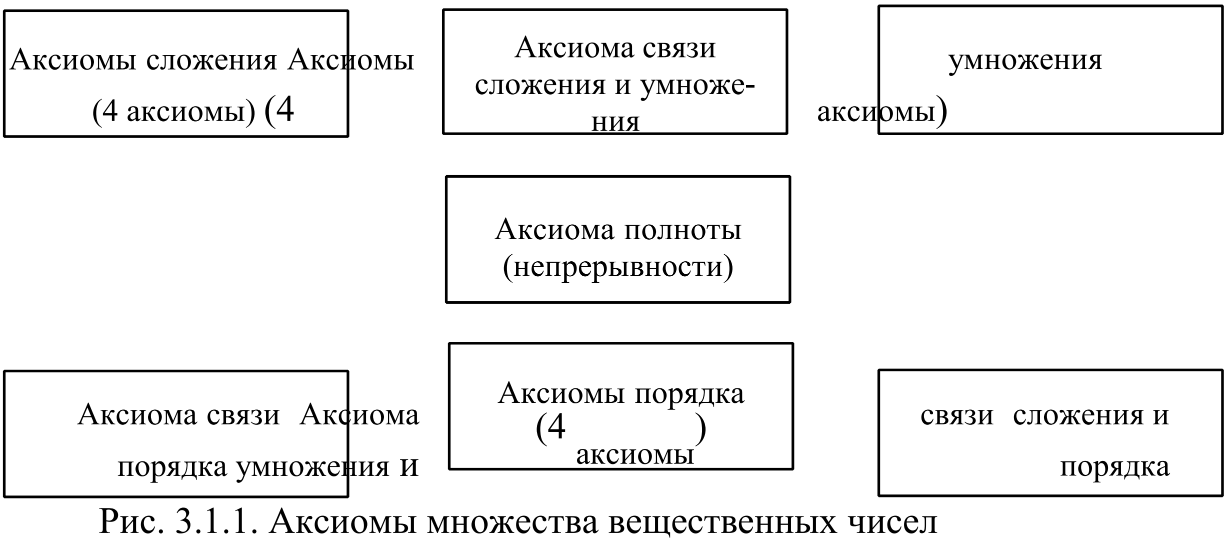


Рис. 3.1.1. Аксиомы множества вещественных чисел

Определение 3.1.1. Множество $\mathbb{R}$, определяемое системой аксиом, формулировка которых приведена в пунктах 3.2 – 3.5, называется множеством вещественных (действительных) чисел. Элементы множества $\mathbb{R}$ называются вещественными (действительными) числами.

Задача 3.1.1. Приведите примеры известных свойств вещественных чисел, отличных от свойств, перечисленных в начале раздела 3.1. Какие из этих свойств являются аксиомами?

3.2 Аксиомы сложения

На декартовом произведении $\mathbb{R}^2$ определена функция (операция сложения) $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая четырем аксиомам:

3.2.1. Аксиома коммутативности сложения. $\forall a$, $b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$.

3.2.2. Аксиома ассоциативности сложения. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3.2.3. Аксиома существования нейтрального элемента для сложения – нуля.

$\exists 0 \in \mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a$.

3.2.4. Аксиома существования противоположного элемента. $\forall a \in \mathbb{R}$: $\exists(-a) \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$.

Замечание 3.2.1. Равенства, используемое в аксиомах 3.2.1-3.2.4 являются удобной формой обозначения равенства значений функции $+$. Так, в аксиоме 3.2.1 равенство $a + b = a + b$ является удобным условным обозначением равенства значений функции $+(a, b) = +(b, a)$: $(((a, b), u) \in +) \wedge (((b, a), v) \in +) \Rightarrow (u = v)$. В аксиоме 3.2.2 равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ является удобным условным обозначением равенства значений функции $+(+(a, b), c) = +(a, +(b, c))$: $(((a, b), u) \in +) \wedge (((u, c), v) \in +) \wedge (((b, c), p) \in +) \wedge (((a, p), q) \in +) \Rightarrow (v = q)$. В аксиоме 3.2.3 равенство $a + 0 = x$ используется для обозначения высказывания $(((a, 0), b) \in +) \Rightarrow (b = a)$. В аксиоме 3.2.4 равенство $a + (-a) = 0$ используется для обозначения высказывания $(((a, (-a)), d) \in +) \Rightarrow (d = 0)$.

Определение 3.2.1. Для $\forall a, b \in \mathbb{R}$ операция сложения $b + (-a)$ может быть записана в эквивалентном виде $b - a$. Операция $b - a$ называется операцией вычитания вещественного числа a из вещественного числа b, значение $b - a$ называется разностью чисел b и a, число b называется уменьшаемым, число a называется вычитаемым.

Из определения 3.1.2 становится понятным удобство обозначение $(-a)$ для вещественного числа, противоположного числу a.

Определение 3.2.2. Множество X, на котором определена операция f, удовлетворяющая аксиомам 3.2.2-3.2.4, называется группой. Множество X, на котором определена операция f, удовлетворяющая аксиомам 3.2.1-3.2.4, называется коммутативной или абелевой группой. Группа называется аддитивной, если операция f называется операцией сложения. Таким образом, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ есть аддитивная абелева группа.

Пример 3.2.1. Для функции $+$ истинными являются высказывания:

1) $((1,2),3) \in +$;	4) $4 \notin +$;
2) $((1,-1), 0) \in +$;	5) $\left((\sqrt{2}, \sqrt{2}), 2\sqrt{2}\right) \in +$;
3) $((1,2),4) \notin +$;	6) $((-1,0), -1) \in +$.

Задача 3.2.1. Приведите примеры истинных высказываний для функции $+$, отличных от высказываний примера 3.2.1.

3.3 Аксиомы умножения

На декартовом произведении $\mathbb{R}^2$ определена функция (операция умножения) $\bullet : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая четырем аксиомам:

3.3.1. Аксиома коммутативности умножения. $\forall a,$
$b \in \mathbb{R}$: $a \bullet b = b \bullet a$.

3.3.2. Аксиома ассоциативности умножения.
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

3.3.3. Аксиома существования нейтрального элемента для умножения – единицы.
$\exists 1 \in \mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \bullet 1 = a$.

3.3.4. Аксиома существования обратного элемента.
$\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$: $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$: $a \bullet a^{-1} = 1$.

Замечание 3.3.1. В аксиоме 3.3.4 не определено вещественное число, обратное к числу 0. Причина такого исключительного свойства нуля по отношению к операции умножения будет выяснена в дальнейшем.

Замечание 3.3.2. Знак $\bullet$ может быть опущен, если запись выражения этот знак подразумевает. Например, выражение $2 \bullet a$ можно записывать в виде $2a$.

Определение 3.3.1. Для $\forall b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ операция умножения $b \bullet a^{-1}$ может быть записана в эквивалентном виде $b{:}\,a$ или $\frac{b}{a}$. Операция $b{:}\,a$ называется операцией деления вещественного числа b на вещественное число a, число $b{:}\,a$ называется частным от деления числа b на число a, число b называется делимым, число a называется делителем.

Из определения 3.3.1 становится понятным удобство обозначение a^{-1} для вещественного числа, обратного числу a.

Определение 3.3.2. Группа называется мультипликативной, если операция f, определяющая группу, называется операцией умножения. Таким образом, множество $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ есть мультипликативная абелева группа.

Пример 3.3.1. Для функции $\bullet$ истинными являются высказывания:

1) $((1,2),2) \in \bullet$; 4) $4 \notin \bullet$;

2) $((1,-1),-1) \in \bullet$; 5) $\left((\sqrt{2},\sqrt{2}),2\right) \in \bullet$;

3) $((1,2),4) \notin \bullet$; 6) $((-1,0),0) \in \bullet$.

Задача 3.3.1. Для аксиом умножения сформулируйте замечание, аналогичное замечанию 3.2.1 для аксиом сложения.

Задача 3.3.2. Приведите примеры истинных высказываний для функции $\bullet$, отличных от высказываний примера 3.3.1.

3.4 Аксиомы порядка

Определено отношение $\leq \subseteq \mathbb{R}^2$, то есть $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$ установлено, истинным или нет является высказывание $(a,\ b) \in \leq$. Высказывание $(a,\ b) \in \leq$ обычно записывают в виде $a \leq b$. Отношение $\leq$, называемое отношением порядка, удовлетворяет четырем аксиомам:

3.4.1. Аксиома рефлексивности.

$\forall a \in \mathbb{R}{:}\ a \leq a.$

3.4.2. Аксиома антисимметричности.

$\forall a, b \in \mathbb{R}{:}\ ((a \leq b) \land (b \leq a)) \Rightarrow (a = b).$

3.4.3. Аксиома транзитивности.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}{:}\ ((a \leq b) \land (b \leq c)) \Rightarrow (a \leq c).$

3.4.4. Аксиома линейной упорядоченности. $\forall a,$
$b \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \vee (b \leq a)$.

Выражение $a \leq b$ называют неравенством или нестрогим неравенством. Для неравенства $a \leq b$ можно использовать равносильную форму записи $b \geq a$. Для системы неравенств $\begin{cases} a \leq b, \\ a \neq b \end{cases}$ можно использовать равносильные формы записи $a < b$ или $b > a$. Выражения $a < b$ и $b > a$ называют строгими неравенствами.

Пример 3.4.1. Для отношения $\leq$ истинными являются высказывания:

1) $(1; 2) \in \leq$; 5) $4 \notin \leq$; 2) $(-2; -1) \in \leq$; 6) $\{-2; -1\} \notin \leq$;
3) $(1; 1) \in \leq$; 7) $((1; 2), 3) \notin \leq$.
4) $(-3; -5) \notin \leq$;

Задача 3.4.1. Приведите примеры истинных высказываний для отношения $\leq$, отличных от высказываний примера 3.4.1.

Задача 3.4.2. Запишите аксиомы 3.4.1 – 3.4.4, используя принадлежность упорядоченных пар вещественных чисел отношению $\leq$.

3.5 Аксиомы связи

Имеют место следующие аксиомы связи между отношениями 3.2 – 3.4:

3.5.1) Аксиома связи сложения и умножения (аксиома дистрибутивности).

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c.$$

3.5.2) Аксиома связи сложения и порядка.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c).$$

3.5.3) Аксиома связи умножения и порядка.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: ((0 \leq a) \wedge (0 \leq b)) \Rightarrow (0 \leq a \bullet \mathrm{b}).$$

3.6 Аксиома полноты (непрерывности)

$$\begin{cases} A, B \subseteq \mathbb{R}; \\ A, B \neq \emptyset; \\ \forall a \in A, \forall b \in B: a \leq b. \end{cases} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, \forall b \in B: a \leq c \leq b.$$

В дальнейших доказательствах в квадратных скобках будем указывать номера аксиом, следствий, теорем, примеров, на основании которых ставятся знаки равенств, неравенств и логических связок.

Определение 3.6.1. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу) $\coloneqq$ $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A$: $a \le c$ $(c \le a)$. Число c называют верхней (нижней) границей или мажорантой (минорантой) множества A.

Определение 3.6.2. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$, ограниченное сверху и снизу, называют ограниченным.

Пример 3.6.1. Множество $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a\}$ ограничено снизу, в качестве c можно взять любое из чисел, не большее нуля. Множество $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \le 1\}$ ограничено сверху, в качестве c можно взять любое из чисел, не меньшее единицы. Множество $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a \le 1\}$ ограничено.

Определение 3.6.3. Элемент $m \in A$ называется наибольшим или максимальным (наименьшим или минимальным) элементом множества $A \subseteq \mathbb{R}$, если $\forall a \in A$: $a \le m$ $(m \le a)$. Для наибольшего (наименьшего) элемента используются обозначения $m = maxA$ или $m = \max\limits_{a \in A} a$ $(m = minA$ или $m = \min\limits_{a \in A} a)$.

Пример 3.6.2. Во множестве $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \le a < 1\}$ существует минимальный элемент $m = 0$, но не существует максимального элемента. Пример показывает, что не во всяком, даже ограниченном множестве, существует максимальный (минимальный) элемент.

Пример 3.6.3. Доказать справедливость утверждения: $(\exists m = \max\limits_{a \in A \subseteq \mathbb{R}} a) \Rightarrow (A$ – ограничено сверху).

◀ $(\exists m = \max\limits_{a \in A \subseteq \mathbb{R}} a)$ [определение 3.6.3]$\Rightarrow$ $\forall a \in A$: $a \le m$. Тогда при $c = m$: $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A$: $a \le c$, то есть [определение 3.6.3] множество A – ограничено сверху ▶

Определение 3.6.4. Точной верхней границей или верхней гранью множества $A \subseteq \mathbb{R}$ называется наименьшая верхняя граница. Для точной верхней границы используют обозначение $supA$ или $\sup\limits_{a \in A} a$ (супремум).

Следствие 3.6.1. $(\exists s = supA) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0$: $\exists a \in A$: $s - \varepsilon < a \le s)$.

◀ Неравенство $a \le s$ выполняется, так как s есть одна из верхних границ множества A. Если предположить, что $\forall \in a$ A неравенство $s - \varepsilon < a$ не выполняется, то есть $\forall \quad \in a\ A$ выполняется неравенство $s - \varepsilon \geq a$, то $s\_$ является верхней границей. Но $s -$ не может быть верхней границей, так как $s - < s$, а $s = supA$ есть наименьшая верхняя граница. ⊳

Определение 3.6.5. Точной нижней границей или нижней гранью множества $A \subseteq \mathbb{R}$ называется наибольшая нижняя граница. Для точной нижней границы используют обозначение $infA$ или $\inf\limits_{a \in A} a$ (инфимум).

Следствие 3.6.2. $(\exists s = infA) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : s \leq a < s + \varepsilon)$.

Задача 3.6.1. Приведите пример ограниченного подмножества множества $\mathbb{R}$, в котором не существует ни максимального, ни минимального элемента.

Задача 3.6.2. Доказать справедливость утверждения: $(\exists m = \min\limits_{a \in A \subseteq \mathbb{R}} a) \Rightarrow$ (A – ограничено снизу).

Задача 3.6.3. Докажите следствие 3.6.2.

3.7 Следствия из аксиом множества вещественных чисел.

Свойства вещественных чисел, перечисленные в разделе 3.1, а также многочисленные другие свойства, известные из элементарно математики, являются следствиями шестнадцати аксиом 3.2.1-3.6. Приведем важнейшие из этих следствий.

Следствия из аксиом сложения:

a. $\forall a \in \mathbb{R}:\ 0 + a = a$.

b. $\forall a \in \mathbb{R}:\ (-a) + a = 0$.

c. $\forall a, b, d \in \mathbb{R}: (a = b) \Leftrightarrow (a + d = b + d)$.

d. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: (a + b = c) \Leftrightarrow (a + b + d = c + d)$.

e. Уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение 1. $x = b + (-a)$. По определению 3.2.1 решение может быть 2. записано в эквивалентном виде $x = b - a$.

f. $\exists!\ 0$.

g. $\forall a \in \mathbb{R}: \exists!\ (-a)$.

h. $\forall a \in \mathbb{R}: (-(-a)) = a$.

Следствия из аксиом умножения: a.
$\forall a \in \mathbb{R}:\ 1 \bullet a = a$.

b. $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}:\ \ a^{-1} \bullet a = 1$.

c. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (a = b) \Leftrightarrow (a \bullet d = b \bullet d)$.

d. $\forall a, b, d \in \mathbb{R}$: $(a = b) \Rightarrow (a \bullet d = b \bullet d)$.

e. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\forall d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (a \bullet b = c) \Leftrightarrow (a \bullet b \bullet d = c \bullet d)$.

f. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a \bullet b = c) \Rightarrow (a \bullet b \bullet d = c \bullet d)$.

g. Уравнение $x \bullet a = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение 1. $x = b \bullet a^{-1}$. По определению 3.3.1 решение может быть

2. записано в эквивалентном виде $x = b$: a.

h. $\exists!$ 1.

i. $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\exists!$ a^{-1}.

j. $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $(a^{-1})^{-1} = a$.

Следствия из аксиом порядка:

a. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < b) \Rightarrow (a \leq b)$.

b. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (b < a) \Leftrightarrow 0$, то есть неравенства $a < b$ и 1. $b < a$ не могут выполняться одновременно.

c. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеет место одно и только одно из соотношений:

1. $a < b$, $a = b$, $b < a$.

d. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$.

e. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a < c$.

Следствия из аксиом связи сложения и умножения:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \bullet 0 = 0$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \bullet b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1) \bullet a$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}$: $(-1) \bullet (-a) = a$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}$: $(-a) \bullet (-a) = a \bullet a$.

Следствия из аксиом связи порядка со сложением и умножением:

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \Rightarrow (a + c) < (b + c)$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \Rightarrow (-a < 0)$.
3. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$.
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$.
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 < a \bullet b)$. 6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 < a \bullet b)$. 7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \bullet b < 0)$. 8. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(0 \leq a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 \leq a \bullet b)$.

9. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a \leq 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 \leq a \bullet b)$.

10. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \bullet b < 0)$.

11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow (a \bullet c < b \bullet c)$.

12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (b \bullet c < a \bullet c)$.

$0 < 1$ 13..
$\forall a \in \mathbb{R}$ $< a) \Rightarrow (0 < a^{-1})$ 14. : (0 .
$\forall a, b \in$ $(0 < a) \wedge (a < b) \Rightarrow$ 15. $\mathbb{R}$: $(0 < b^{-1}) \wedge (b^{-1} < a^{-1})$.

Следствия из аксиомы полноты:

1. Принцип верхней грани: $\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}; \\ A \neq \emptyset; \\ A \text{ — ограничено сверху.} \end{cases} \Rightarrow \exists!\, supA.$

2. Принцип нижней грани: $\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}; \\ A \neq \emptyset; \\ A \text{ — ограничено снизу.} \end{cases} \Rightarrow \exists!\, infA.$

Пример 3.7.1. Доказать следствие 3.7.1: $\forall a \in \mathbb{R}$: $0 + a = a$. ◁
$0 + a$ [аксиома 3.2.1] $= a + 0$ [аксиома 3.2.3] $= a$.▷

Пример 3.7.2. Доказать следствие 3.7.3: $\forall a, b, d \in \mathbb{R}$: $(a = b) \Leftrightarrow (a + d = b + d)$.

◁ Для доказательства используем истинность высказывания $(A \Leftrightarrow B)$ [пример 1.2.2] $\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ при $A := (a = b)$; $B := (a + d = b + d)$. Докажем, что $(a = b) \Rightarrow (a + d = b + d)$. Так как $a = b$, то $\forall d \in \mathbb{R}$: $(a,\ d) = (b,\ d)$. Операция $+$ является функцией, значения которой по определению равны при равных значениях аргумента: $+(a, d) = +(b, d)$. Формой записи последнего выражения является равенство $a + d = b + d$.

Докажем, что $(a + d = b + d) \Rightarrow (a = b)$. Существуют $u, v \in \mathbb{R}$, такие что $a + d = u$, $b + d = v$. Для чисел u и v равенство $a + d = b + d$ имеет вид $u = v$. По доказанному выше $(u = v) \Rightarrow (u + (-d) = v + (-d))$ или, возвращаясь к переменным a и b: $(a + d = b + d) \Rightarrow (a + d + (-d) = b + d + (-d))$. Так как $a + d + (-d)$ [аксиома 3.2.2] $= a + \big(d + (-d)\big)$ [аксиома 3.2.4] $= a + 0$ [аксиома 3.2.3] $= a$; и $b + d + (-d)$ [аксиома 3.2.2] $= b + \big(d + (-d)\big)$ [аксиома 3.2.4] $= b + 0$ [аксиома 3.2.3] $= b$, то $(a + d = b + d) \Rightarrow (a = b)$. ▷

Пример 3.7.3. Доказать следствие 3.7.4:$\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a + b = c) \Leftrightarrow (a + b + d = c + d)$.

◁ Существует $u \in \mathbb{R}$, такое что $a+b=u$. Для числа u равенство $a+b=c$ имеет вид $u=c$. По следствию 3.7.3: $(u=c) \Leftrightarrow (u+d=c+d)$ или, возвращаясь к переменным a и b: $(a+b=c) \Leftrightarrow (a+b+d=c+d)$. ▷

Пример 3.7.4. Доказать следствие 3.7.5: Уравнение $x+a=b$ имеет единственное решение $x=b+(-a)$.

◁ $(x+a=b)$ [следствие 3.7.4] $\Leftrightarrow (x+a+(-a)=b+(-a))$ [аксиома 3.2.2] $\Leftrightarrow (x+(a+(-a))=b+(-a))$ [аксиома 3.2.4] $\Leftrightarrow (x+0=b+(-a))$ [аксиома 3.2.3] $\Leftrightarrow (x=b+(-a))$. ▷

Пример 3.7.5. Доказать следствие 3.7.6: $\exists!\,0$.

◁ Доказательство проведем от противного, доказав что при $\neg A \Leftrightarrow 1$ имеет место утверждение $\neg A \Rightarrow A$ [см. пример 1.2.1], где $A := \exists!\,0$. Если $\neg A \Leftrightarrow 1$, то есть существует не единственный нуль, то для любой пары нулей $0' \neq 0''$: $\exists!\, a \in \mathbb{R}$ такое, что $a=0'+0''$. По аксиоме 3.2.3 для нуля $0''$:
$0'+0''=0'$. По следствию 3.7.1 для нуля $0'$: $a=0''$. В силу единственности a имеет место утверждение: $0'=0''$. Таким образом, доказано, что все нули попарно равны, то есть имеет место утверждение $(\neg A \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (A \Leftrightarrow 1)$. ▷

Пример 3.7.6. Доказать следствие 3.7.7: $\forall a \in \mathbb{R}: \exists!\,(-a)$.

◁ Доказательство проведем от противного, доказав что при $\neg A \Leftrightarrow 1$ имеет место утверждение $\neg A \Rightarrow A$ [см. пример 1.2.1], где $A := \exists!\,(-a)$. Если существует не единственное число, противоположное числу a, то для произвольной пары $(-a)' \neq (-a)''$ вещественных чисел, противоположных числу a имеют место равносильные переходы $((-a)'+a$ [следствие 3.7.2] $=0)$ [следствие 3.7.4] $\Leftrightarrow ((-a)'+a+(-a)''=0+(-a)'')$ [аксиома 3.2.1, следствие 3.7.1] $\Leftrightarrow ((-a)'+(a+(-a)'')=(-a)'')$ [аксиома 3.7.4] $\Leftrightarrow ((-a)'+0)=(-a)'')$ [аксиома 3.7.3] $\Leftrightarrow (-a)'=(-a)''$. Таким образом, доказано, что все числа, противоположные числу a, попарно равны, то есть существует единственное число, противоположное числу a. То есть имеет место утверждение $(\neg A \Leftrightarrow 1) \Rightarrow (A \Leftrightarrow 1)$. ▷

Пример 3.7.7. Доказать следствие 3.7.8: $\forall a \in \mathbb{R}: (-(-a))=a$.

◁ Запишем равносильные переходы от истинного высказывания до высказывания, истинность которого необходимо доказать: $(-(-a))+(-a)$ [следствие 3.7.2] $=0$ [следствие 3.7.4] $\Leftrightarrow ((-(-a))+(-a)+a=0+a)$ [аксиома 3.2.1, следствие 3.7.1] $\Leftrightarrow ((-(-a))+((-a)+a)=a)$ [аксиома 3.7.4] $\Leftrightarrow ((-(-a))+0=a)$ [аксиома 3.7.3] $\Leftrightarrow ((-(-a))=a)$. ▷

Пример 3.7.8. Доказать следствие 3.7.19: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < b) \Rightarrow (a \leq b)$.

◁ По определению $(a < b) \Leftrightarrow ((a \leq b) \wedge (a \neq b))$, поэтому высказывание $(a < b) \Rightarrow (a \leq b)$ равносильно высказыванию $((a \leq b) \wedge (a \neq b)) \Rightarrow (a \leq b)$, истинность которого доказана в задаче 1.2.3.12 ($A = a \leq b$; $B = a \neq b$). ▷

Пример 3.7.9. Доказать следствие 3.7.20: $\forall a$, $b \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (b < a) \Leftrightarrow 0$.

◁ Доказательство от противного. Пусть $\exists a$, $b \in \mathbb{R}$ такие, что неравенства $a < b$ и $b < a$ выполняться одновременно. Тогда по следствию 3.7.19 одновременно будут выполняться неравенства $a \leq b$ и $b \leq a$, откуда по аксиоме 3.4.2 следует, что $a = b$. Последнее равенство противоречит каждому из неравенств $a < b$ и $b < a$. ▷

Пример 3.7.10. Доказать следствие 3.7.21: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеет место одно и только одно из соотношений: $a < b$, $a = b$, $b < a$.

◁ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ выполняется одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a \neq b$. Следствие 3.7.21 будет доказано, если доказать, что при $a \neq b$ выполняется одно и только одно из неравенств: $a < b$, $b < a$. По аксиоме 3.4.2 обязательно выполняется неравенство $a \leq b$ или неравенство $b \leq a$. Если выполняются неравенства $a \leq b$ и $a \neq b$, то во-первых, выполняется неравенство $a < b$ и во-вторых, по следствию 3.7.20 не может выполняться неравенство $b < a$. Если выполняются неравенства $b \leq a$ и $a \neq b$, то во-первых, выполняется неравенство $b < a$ и во-вторых, по следствию 3.7.20 не может выполняться неравенство $a < b$. ▷

Пример 3.7.11. Доказать следствие 3.7.22: $\forall a$, b, $c \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$.

◁ Запишем равносильные переходы и импликации от высказывания, истинного по условию следствия 3.7.22, до высказывания $a \leq c$: $(a \leq b) \wedge (b < c)$ [определение строгого неравенства $b < c$] $\Leftrightarrow (a \leq b) \wedge ((b \leq c) \wedge (b \neq c))$[задача 1.2.3.13]$\Leftrightarrow ((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \wedge (b \neq c)$ [задача 1.2.3.12] $\Rightarrow (a \leq b) \wedge (b \leq c)$ [аксиома 3.4.3] $\Rightarrow a \leq c$. Докажем от противного, что $a \neq c$. Если $a = c$, то имеет место утверждение: $(a \leq b) \wedge (b < c)$ [$a = c$] $(a \leq b) \wedge (b < a)$ [определения строгого неравенства $b < a$, задача 1.2.3.13] $((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \wedge (a \neq b)$ [аксиома 3.4.2] $(a = b) \wedge (a \neq b)$ [задача 1.2.3.15] $\Leftrightarrow 0$. Таким образом доказано утверждение $(a \leq b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a \leq c) \wedge (a \neq c) \Leftrightarrow a < c$. ▷

Пример 3.7.12. Доказать следствие 3.7.24: $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \bullet 0 = 0$.

⦉ Имеет место утверждение: $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \bullet 0 + a \bullet 0$ [аксиома 3.5.1] $=$ $a \bullet (0+0)$ [аксиома 3.2.3] $= a \bullet 0$, то есть $a \bullet 0 + a \bullet 0 = a \bullet 0$. Следствие 3.7.24 доказывают равносильные переходы: $a \bullet 0 + a \bullet 0 = a \bullet 0$ [аксиома 3.7.4] $\Leftrightarrow a \bullet 0 + a \bullet 0 + (-(a \bullet 0)) = a \bullet 0 + (-(a \bullet 0))$ [аксиома 3.2.2] $\Leftrightarrow$ $a \bullet 0 + (a \bullet 0 + (-(a \bullet 0))) = a \bullet 0 + (-(a \bullet 0))$ [аксиома 3.2.4] $\Leftrightarrow a \bullet 0 + 0 = 0$ [аксиома 3.2.3] $\Leftrightarrow a \bullet 0 = 0$. ⦊

Если допустить, что для числа нуль существует обратное число 0^{-1}, то по аксиоме 3.3.4 имеет место равенство $0 \bullet 0^{-1} = 1$, а по следствию 3.7.24 имеет место равенство $0 \bullet 0^{-1} = 0$, откуда следует, что должно быть $1 = 0$. Становится понятным, почему во множестве вещественных чисел не определено число, обратное к числу нуль.

Пример 3.7.13. Доказать следствие 3.7.25: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \bullet \mathrm{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.

⦉ Если $a \neq 0$, то b [следствие 3.7.15]$=$ $0 \bullet a^{-1}$[следствие 3.7.24] $= 0$. Если $b \neq 0$, то a [следствие 3.7.15]$=$ $0 \bullet b^{-1}$[следствие 3.7.24]$=$ 0 . ⦊

Пример 3.7.14. Доказать следствие 3.7.26: $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1) \bullet a$.

⦉ Покажем, что число $(-1) \bullet a$ является противоположным к числу a, то есть $a + (-1) \bullet a = 0$. Имеют место равенства: $a + (-1) \bullet a$ [аксиома 3.3.3] $= 1 \bullet a + (-1) \bullet a$ [аксиома 3.3.3] $= (1 + (-1)) \bullet a$ [аксиома 3.5.1] $=$ $0 \bullet a$ ⦊ [следствие 3.7.24] $= 0$. ⦊

Пример 3.7.15. Доказать следствие 3.7.27: $\forall a \in \mathbb{R}$: $(-1) \bullet (-a) = a$.

⦉ Имеют место равенства: $(-1) \bullet (-a)$ [следствие 3.7.26] $= (-(-a))$ [следствие 3.7.8] $= a$. ⦊

Пример 3.7.16. Доказать следствие 3.7.28: $\forall a \in \mathbb{R}$: $(-a) \bullet (-a) = a \bullet a$.

⦉ Имеют место равенства: $(-a) \bullet (-a)$ [следствие 3.7.26] $= ((-1) \bullet a) \bullet (-a)$ [аксиомы 3.3.1, 3.3.2] $= a \bullet ((-1) \bullet (-a))$ [следствие 3.7.27] $= a \bullet a$. ⦊

Пример 3.7.17. Доказать следствие 3.7.29: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \Rightarrow (a + c) < (b + c)$.

⦉ $(a < b)$ [следствие 3.7.19] $\Rightarrow (a \leq b)$ [аксиома 3.5.2] $\Rightarrow (a + c \leq b + c)$. Остается доказать, что равенство $a + c = b + c$ противоречит условию $a < b$. Действительно $a + c = b + c$ [аксиома 3.7.3] $\Leftrightarrow a = b$, что по аксиоме 3.7.21 несовместимо с неравенством $a < b$.⦊

Пример 3.7.18. Доказать следствие 3.7.30: $\forall a \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \Rightarrow (-a <$

0).

◃ $(0 < a)$ [следствие 3.7.29] $\Rightarrow (0 + (-a) < a + (-a))$ [следствие 3.7.1] $\Rightarrow (-a < a + (-a))$ [аксиома 3.2.4] $\Rightarrow (-a < 0)$. ▹

Пример 3.7.19. Доказать следствие 3.7.31: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)$.

◃ $(a \leq b) \wedge (c \leq d)$ [аксиома 3.5.2]$\Rightarrow (a + c \leq b + c) \wedge (c + b \leq d + b)$ [аксиома 3.2.1]$\Rightarrow (a + c \leq b + c) \wedge (b + c \leq b + d)$ [аксиома 3.4.3]$\Rightarrow$ $(a + c \leq b + d)$. ▹

Пример 3.7.20. Доказать следствие 3.7.33: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 < a \bullet b)$.

◃ [следствие 3.7.19]: $((0 < a) \Rightarrow (0 \leq a)) \wedge ((0 < b) \Rightarrow (0 \leq b))$ [пример 1.2.3.17] $\Rightarrow ((0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 \leq a) \wedge (0 \leq b)$ [аксиома 3.5.3] $\Rightarrow$ $(0 \leq a \bullet b)$. Остается доказать, что равенство $a \bullet b \neq 0$. По условию: $(0 < a)$ [следствие 3.7.21] $\Rightarrow a \neq 0$; $(0 < b)$ [следствие 3.7.21] $\Rightarrow b \neq 0$; и тогда по следствию 3.7.25: $a \bullet b \neq 0$.▹

Пример 3.7.21. Доказать следствие 3.7.39: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow (a \bullet c < b \bullet c)$.

◃ $(a < b)$ [следствие 3.7.29] $\Rightarrow (a + (-a) < b + (-a))$ [аксиома 3.2.4] $\Leftrightarrow (0 < b + (-a))$. $(a < b) \wedge (0 < c)$ [задача 1.2.3.18, 1.2.3.17] $\Rightarrow ((0 < b + (-a)) \wedge (0 < c))$ [следствие 3.7.34] $\Rightarrow 0 < (b + (-a)) \bullet c$ [аксиома 3.5.1] $\Leftrightarrow$ $0 < b \bullet c + (-a) \bullet c$ [следствие 3.7.26] $\Leftrightarrow 0 < b \bullet c + (-1) \bullet a \bullet c$ [аксиома 3.3.2] $\Leftrightarrow 0 < b \bullet c + (-1) \bullet (a \bullet c)$ [следствие 3.7.26] $\Leftrightarrow 0 < b \bullet c + (-(a \bullet c))$ [следствие 3.7.29] $\Leftrightarrow 0 + a \bullet c < b \bullet c + (-(a \bullet c)) + a \bullet c$ [следствие 3.7.1] $\Leftrightarrow a \bullet c < b \bullet c + (-(a \bullet c)) + a \bullet c$ [аксиома 3.2.2] $\Leftrightarrow a \bullet c < b \bullet c + ((-(a \bullet c)) + a \bullet c)$ [аксиома 3.2.4] $\Leftrightarrow a \bullet c < b \bullet c + 0$ [аксиома 3.2.3] $\Leftrightarrow$ $a \bullet c < b \bullet c$ ▹

Пример 3.7.22. Доказать следствие 3.7.41: $0 < 1$.

◃ По следствию 3.7.21 имеет место одно и только одно из соотношений: $0 < 1$, $0 = 1$, $1 < 0$. Следствие 3.7.41 будет доказано, если показать, что не имеют места соотношения $0 = 1$, $1 < 0$. Для числа 0 по аксиоме 3.3.4 не существует обратного числа, в то время как для числа 1 существует обратное число, равное 1. Следовательно не имеет места соотношение $0 = 1$. Если выполняется неравенство $1 < 0$, то по следствию 3.7.34 должно выполняться неравенство: $0 < 1 \bullet 1$ [аксиома 3.3.3] $\Leftrightarrow 0 < 1$. Так как следствию 3.7.21 неравенства $1 < 0$ и $0 < 1$ не могут выполняться одновременно, то неравенство $1 < 0$ не имеет места. ▹

Пример 3.7.23. Доказать следствие 3.7.42: $\forall a \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \Rightarrow (0 < a^{-1})$.

⊲ По следствию 3.7.21 имеет место одно и только одно из соотношений: $0 < a^{-1}$, $0 = a^{-1}$, $a^{-1} < 0$. Следствие 3.7.42 будет доказано, если показать, что не имеют места соотношения $0 = a^{-1}$, $a^{-1} < 0$. $(0 < a)$ [следствие 3.7.21] $\Rightarrow (a \neq 0)$ [аксиома 3.3.4] $\Rightarrow \exists a^{-1}$. Для числа 0 по аксиоме 3.3.4 не существует обратного числа, в то время как для числа a^{-1} существует обратное число, равное a по следствию 3.7.18. Следовательно не имеет места соотношение $0 = a^{-1}$. Если выполняется неравенство $a^{-1} < 0$, то имеет место утверждение $(a^{-1} < 0) \wedge (0 < a)$ [следствие 3.7.38] $\Rightarrow (a^{-1} \bullet a) < 0$ [следствие 3.7.10] $\Leftrightarrow (1 < 0)$. Последнее неравенство противоречит следствию 3.7.41, в силу чего соотношение $a^{-1} < 0$ не имеет места. ⊳

Пример 3.7.24. Доказать следствие 3.7.44:

$$A \subseteq \mathbb{R}; \quad \begin{cases} A \neq \emptyset; \\ A \text{ — ограничено сверху.} \end{cases} \Rightarrow \exists!\, supA.$$

⊲ A — ограничено сверху [определение 3.6.1] $\Leftrightarrow$ существует непустое множество $B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A: a \leq b\}$ верхних границ множества A. Множества A и B удовлетворяют условиям аксиомы 3.6 и, следовательно, $\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, \forall b \in B: a \leq c \leq b$. Из условия $\forall a \in A$: $a \leq c$ следует, что c есть верхняя граница множества A, то есть $c \in B$. Из условия $\forall b \in b$: $c \leq b$ следует, что c есть наименьший элемент во множестве B, то есть по определению 3.6.4 $c = supA$.

Докажем единственность $supA$. Если $c = supA$ и $d = supA$, то каждое из этих чисел есть наименьший элемент во множестве B. Тогда по свойству числа c: $c \leq d$, а по свойству числа d: $d \leq c$. Из двух последних неравенств по аксиоме 3.4.2 следует $c = d$. ⊳

Задача 3.7.1. Укажите известные вам следствия из 3.7.1 – 3.7.42.

Задача 3.7.2. Приведите известные вам следствия из аксиоматики вещественных чисел, отличные от следствий 3.7.1 – 3.7.42.

Задача 3.7.3. Докажите следствие 3.7.2: $\forall a \in \mathbb{R}$: $(-a) + a = 0$.

Задача 3.7.4. Докажите следствие 3.7.9: $\forall a \in \mathbb{R}$: $1 \bullet a = a$.

Задача 3.7.5. Докажите следствие 3.7.10: $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $a^{-1} \bullet a = 1$.

Задача 3.7.6. Докажите следствие 3.7.11: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (a = b) \Leftrightarrow (a \bullet d = b \bullet d)$.

Задача 3.7.7. Докажите следствие 3.7.12: $\forall a, b, d \in \mathbb{R}$: $(a = b) \Rightarrow (a \bullet d = b \bullet d)$.

Задача 3.7.8. Докажите следствие 3.7.13: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (a \bullet b = c) \Leftrightarrow (a \bullet b \bullet d = c \bullet d)$.

Задача 3.7.9. Докажите следствие 3.7.14: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a \bullet b = c) \Rightarrow (a \bullet b \bullet d = c \bullet d)$.

Задача 3.7.10. Докажите следствие 3.7.15: Уравнение $x \bullet a = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \bullet a^{-1}$.

Задача 3.7.11. Докажите следствие 3.7.16: $\exists!\, 1$.

Задача 3.7.12. Докажите следствие 3.7.17: $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\exists!\, a^{-1}$.

Задача 3.7.13. Докажите следствие 3.7.18: $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $(a^{-1})^{-1} = a$.

Задача 3.7.14. Докажите следствие 3.7.23: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a < c$.

Задача 3.7.14. Доказать следствие 3.7.32: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)$.

Задача 3.7.15. Доказать следствие 3.7.34: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 < a \bullet b)$.

Задача 3.7.16. Доказать следствие 3.7.35: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \bullet b < 0)$.

Задача 3.7.17. Доказать следствие 3.7.36: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(0 \leq a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 \leq a \bullet b)$.

Задача 3.7.18. Доказать следствие 3.7.37: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a \leq 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 \leq a \bullet b)$.

Задача 3.7.19. Доказать следствие 3.7.38: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \bullet b < 0)$.

Задача 3.7.20. Доказать следствие 3.7.40: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (b \bullet c < a \bullet c)$.

Задача 3.7.21. Доказать следствие 3.7.43: $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $(0 < a) \wedge (a < b) \Rightarrow (0 < b^{-1}) \wedge (b^{-1} < a^{-1})$.

Задача 3.7.22. Доказать следствие 3.7.44:

$$\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}; \\ A \neq \emptyset \\ ; \end{cases} \Rightarrow$$

A _ ограничено снизу.

$\exists!\, infA$.

3.8 Подмножества множества вещественных чисел

Определение 3.8.1. Множество $P_{+} = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a\}$ ($P_{-} = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}$) называется множеством положительных (отрицательных) чисел. Элементы множества P_{+} (P_{-}) называются положительными (отрицательными) числами.

По определению 3.8.1: $P_{+} \subseteq \mathbb{R}$, $P_{-} \subseteq \mathbb{R}$. По следствию 3.7.41: $(1 \in P_{+}) \Rightarrow P_{+} \neq \emptyset$. По следствиям 3.7.41, 3.7.30: $(-1 \in P_{-}) \Rightarrow P_{-} \neq \emptyset$. В разделе 3.7 доказано, что произведение положительных чисел так же, как и произведение отрицательных чисел – положительное число (следствия 3.7.33, 3.7.34), произведение отрицательного числа на положительное число – отрицательное число (следствия 3.7.35).

Определение 3.8.2. Множество $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} \mid n$ используется при счете предметов $\}$ называется множеством натуральных чисел. Элементы множества $\mathbb{N}$ называются натуральными числами.

Определение 3.8.2 обычно приводится в элементарно математике. Высказывание "n используется при счете предметов", которое в определении 3.8.2 выделяет множество $\mathbb{N}$ из множества $\mathbb{R}$, не является удобным средством для строгого математического обоснования свойств натуральных чисел.

Определение 3.8.3. Множество $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{R} \mid (n = 1) \vee ($$n$ может быть представлено в виде суммы единиц $)\}$ называется множеством натуральных чисел.

В определении 3.8.3 требуется конструктивное уточнение смысла высказывания "n может быть представлено в виде суммы единиц". Такое уточнение может быть выполнено на основе принципа математической индукции.

Определение 3.8.3. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется индуктивным, если $A \neq \emptyset$ и $(a \in A) \Rightarrow ((a + 1) \in A)$.

Пример 3.8.1. Индуктивными являются множества:

1) $\{-1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$;　　4) $\{1; 2; 3; \dots; \frac{1}{2}; \ ; \};$　　$\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

2) $\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \dots; 2; 3; 4; \dots\}$;　　5) $\{\pi; \pi + 1; \pi + 2; \dots\}$;

3) $\{1; 2; 3; \dots\}$;

Множество $\{-1; 1; 2; 3; \dots\}$ не является индуктивным, так как число $0 = -1 + 1$ этому множеству не принадлежит.

Пример 3.8.2. Доказать, что непустое пересечение индуктивных множеств является индуктивным множеством, то есть

$$\begin{cases} A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda; \\ A \neq \emptyset; \\ \forall\lambda \in \Lambda: A_\lambda - \text{индуктивное множество.} \end{cases} \Rightarrow A - \text{индуктивное множество.}$$

◁ $(a \in A)$[определение 2.2.2]$\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda: a \in A_\lambda$[$A_\lambda$ – индуктивное множество] $\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda: (a+1) \in A_\lambda$ [определение 2.2.2]$\Rightarrow (a+1) \in A$ ▷

Определение 3.8.4. Множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих единицу. В силу примера 3.8.2 $\mathbb{N}$ есть индуктивное множество, содержащее единицу.

Следствие 3.8.1. Принцип математической индукции.

$$\begin{cases} A \subseteq \mathbb{N}; \\ 1 \in A; \\ (n \in A) \Rightarrow ((n+1) \in A). \end{cases} \Rightarrow (A = \mathbb{N}).$$

Принцип математической индукции является прямым следствием определения 3.8.4 множества натуральных чисел. По принципу математической индукции доказательство истинности утверждения P для любого натурального n, сводится к доказательству истинности утверждений:

1) P справедливо для $n = 1$;
2) Если высказывание P справедливо для произвольного $n \in \mathbb{N}$, то это высказывание справедливо для $(n+1)$.

Сформулируем свойства натуральных чисел в виде следствий из определения 3.8.4.

Следствие 3.8.2. $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m+n) \in \mathbb{N})$.

Следствие 3.8.3. $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m \bullet n) \in \mathbb{N})$.

Следствие 3.8.4. $(n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbb{N})$.

Следствие 3.8.5. $\forall n \in \mathbb{N}: \exists min\{m \in \mathbb{N} \mid n < m\} = n + 1$.

Следствие 3.8.6. $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n + 1 \leq m)$.

Следствие 3.8.7. $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\nexists m \in \mathbb{N}: n < m < n + 1)$.

Следствие 3.8.8. $(n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}) \Rightarrow (\nexists m \in \mathbb{N}: n - 1 < m < n)$.

Следствие 3.8.9. $(A \subseteq \mathbb{N}) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow \exists minA$.

Следствие 3.8.10. $\mathbb{N} \subseteq P_{+}$.

Пример 3.8.3. Доказать следствие 3.8.2: $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m+n) \in \mathbb{N})$.

⟬ Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (m+n) \in \mathbb{N}\}$ и докажем на основании принципа математической индукции, что $A = \mathbb{N}$. Если $n = 1$, то $(m+n) = (m+1) \in \mathbb{N}$, так как $m \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ - индуктивное множество. Если $(m+n) \in \mathbb{N}$, то $\big(m+(n+1)\big) = ((m+n)+1) \in \mathbb{N}$, так как $\mathbb{N}$ - индуктивное множество. ⟭

Пример 3.8.4. Доказать неравенство Бернулли

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}; \\ \alpha \in \mathbb{R}; \\ \alpha > -1. \end{cases} \Rightarrow (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

⟬ Доказательство проведем на основании принципа математической индукции. При $n = 1$ неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ выполняется, так как принимает вид $1 + \alpha \geq 1 + \alpha$. Если неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ выполняется для $n \in \mathbb{N}$, то оно выполняется и для $n+1$, поскольку $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1 + (\mathrm{n}+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (\mathrm{n}+1)\alpha$. ⟭

Определение 3.8.5. Множеством целых чисел $\mathbb{Z}$ называется объедения множеств $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{-} \cup \{0\}$, где $\mathbb{N}_{-}$ есть множество чисел, противоположных к натуральным числам.

Следствие 3.8.11. $(m, n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow ((m+n) \in \mathbb{Z})$. **Следствие 3.8.12.** $(m, n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow ((m \bullet n) \in \mathbb{Z})$.

Определение 3.8.7. Множество $\mathbb{Q} = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists m, n \in \mathbb{Z}: a = m \bullet n^{-1}\}$ называется множеством рациональных чисел. То есть к рациональным относятся действительные числа, которые могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел.

Множество рациональных чисел не является пустым, так как к этому множеству относятся, например, числа 1 и 0.

Определение 3.8.8. Множество $\mathbb{J} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ называется множеством иррациональных чисел. То есть к иррациональным относятся действительные числа, которые не являются рациональными.

Множество иррациональных чисел не является пустым, так как к этому множеству относится, например, положительное вещественное число, квадрат которого равен двум (См. теорему 3.8.1). Это число обозначается $\sqrt{2}$.

Теорема 3.8.1. $\sqrt{2} \in \mathbb{J}$. Теорема приводится без доказательства. Доказательство теоремы приведено, например, в [3, с.30-31].

Определение 3.8.9.

1) Отрезком ab называется множество $[a; b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

2) Интервалом ab называется множество $(a;\ b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

3) Полуинтервалом $a\,b$, содержащим конец a, называется множество $[a; b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

4) Полуинтервалом ab, содержащим конец b, называется множество $(a; b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

5) Промежутками называются отрезки, интервалы и полуинтервалы. Концами промежутка называются числа a и b. Длиной промежутка называется число $b - a$.

6) Неограниченными промежутками называются множества $[a; +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $(a; +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(-\infty; b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, $(-\infty; b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $(-\infty; +\infty) \coloneqq \mathbb{R}$.

7) Окрестностью $V(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал, содержащий точку a.

8) Проколотой окрестностью $V^0(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $V(a)\backslash\{a\}$, то есть проколотая окрестность $V^0(a)$ есть окрестность $V(a)$ за исключением точки a.

9) – окрестностью $V_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ (> 0) называется интервал $(a - ;\, a +) = \{x : |x - a| < \}$. Длина – окрестности равна 2 .

10) Проколотой – окрестностью $V_\varepsilon{}^0(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $V_\varepsilon{}^0(a)\backslash\{a\} = \{x : 0 < |x - a| < \}$, то есть проколотая – окрестность $V_\varepsilon{}^0(a)$ есть – окрестность $V_\varepsilon(a)$ за исключением точки a.

Задача 3.8.1. Приведите примеры индуктивных и не индуктивных множеств, отличных от множеств примера 3.8.1.

Задача 3.8.2. Докажите, что любое конечное множество не является индуктивным.

Задача 3.8.3. Сформулируйте свойства натуральных чисел 3.8.2 – 3.8.10 в словесной форме.

Задача 3.8.3. Докажите следствие 3.8.3: $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m \bullet n) \in \mathbb{N})$.

Задача 3.8.4. Докажите следствие 3.8.4: $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbb{N})$.

Задача 3.8.5. Докажите следствие 3.8.5: $\forall n \in \mathbb{N}: \exists \min\{m \in \mathbb{N} \mid n < m\} = n + 1$.

Задача 3.8.6. Докажите следствие 3.8.6: $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n + 1 \leq m)$.

Задача 3.8.7. Докажите следствие 3.8.7: $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\nexists m \in \mathbb{N}: n < m < n + 1)$.

Задача 3.8.8. Докажите следствие 3.8.8: $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}) \Rightarrow (\nexists m \in \mathbb{N}: n - 1 < m < n)$.

Задача 3.8.9. Докажите следствие 3.8.9: $(A \subseteq \mathbb{N}) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow \exists \min A$.

Задача 3.8.10. Докажите следствие 3.8.10: $\mathbb{N} \subseteq P_{+}$.

Задача 3.8.11. Приведите примеры и геометрическую интерпретацию отрезка, интервала, полуинтервала, неограниченного промежутка, окрестности, проколотой окрестности и – окрестности некоторой точки.

Задача 3.8.12. Используя метод математической индукции, доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства и неравенства:

1) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$;

2) $1^2 + 2^2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{2}$;

3) Формула бинома Ньютона: $\forall \alpha \in \mathbb{R}: (1+\alpha)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ есть биномиальные коэффициенты;

4) $3n^2 \geq 2n + 1$;

5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: |\sin(n\alpha)| \leq n|\sin\alpha|$;

6) $\forall a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{R}: |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

РАЗДЕЛ 4 ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

4.1 Числовые функции. Элементарные функции

Числовые функции являются частным случаем функций, определение которых дано в разделе 2 (определение 2.4.2).

Определение 4.1.1. *Числовой функцией одной переменной* называется функция, для которой область определения и область значений есть подмножества множества вещественных чисел, то есть $D \subseteq \mathbb{R}$ и $E \subseteq \mathbb{R}$.

В дальнейшем, если не оговорено особо, числовую функцию одной переменной будем называть просто функцией и использовать для нее обозначение $f(x)$.

Определение 4.1.2. *Основными элементарными функциями* называются следующие функции:

1) *Постоянная функция* $y = c$; $c \in \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R}$.
2) *Степенная функция* $y = x^a$; $a \in \mathbb{R}$. Если $a = 0$, то $y = 1$; $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Если $a \in \mathbb{N}$, то $D = \mathbb{R}$. Если $a \in (\mathbb{Z}\backslash(\mathbb{N} \cup \{0\}))$, то $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Если $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$, и $a < 0$ то $D = P_+$. Если $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$, и $a > 0$ то $D = P_+ \cup \{0\}$.
3) *Показательная функция* $y = a^x$; $a \in (P_+ \backslash\{1\})$; $D = \mathbb{R}$.
4) *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$; $a \in (P_+ \backslash\{1\})$; $D = P_+$.

Логарифмическая функция является обратной к показательной функции.

5) *Тригонометрические функции*:

a. $y = \sin x$; $y = \cos x$; $D = \mathbb{R}$.

b. $y = \operatorname{tg} x$; $D = \mathbb{R}\backslash \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c. $y = \operatorname{ctg} x$; $D = \mathbb{R}\backslash\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Тригонометрические функции a – c не имеют обратных функций, так как не являются биективными. Например, $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$, то есть двум различным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции. Если должным образом сузить область определения D, то каждая из функций a – c может быть сделана биективной и, следовательно, имеющей обратную функцию.

6) *Обратные тригонометрические функции*:

a. $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $D = [-1; 1]$.

Функция $\arcsin x$ является обратной к функции $\sin x$ при $D = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; функция $\arccos x$ является обратной к функции $\cos x$ при $D =$

2 2

$[0; \pi]$.

b. $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$; $D = \mathbb{R}$.

Функция $\operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $\operatorname{tg} x$ при $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; функция $\operatorname{arcctg} x$ является обратной к функции $\operatorname{ctg} x$ при $D = (0; \pi)$.

Определение 4.1.3. *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций из основных элементарных функций.

Пример 4.1.1. Наиболее известными элементарными функциями являются:

1) *Многочленом* называется элементарная функция $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. $D(P(x)) = \mathbb{R}$. Если $a_n \neq 0$, то многочлен $P(x)$ называют *многочленом* *n – ой степени* и обозначают $P_n(x)$.

2) *Рациональной функцией* (*рациональной дробью*) называется элементарная функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ – многочлен, $Q(x)$ – многочлен, тождественно не равный нулю. $D\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

3) *Гиперболические функции*:

a. Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $D = \mathbb{R}$.

b. Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $D = \mathbb{R}$.

c. Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $D = \mathbb{R}$.

d. Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ биективны и имеют обратные функции. Гиперболический косинус $\operatorname{ch} x$ не является биективной функцией и может иметь обратную функцию только, если должным образом сузить его область определения D.

4) *Обратные гиперболические функции*:

a. Ареасинус гиперболический: $\operatorname{arcsh} x$, являющийся обратной функцией к функции $\operatorname{sh} x$; $D(\operatorname{arcsh} x) = \mathbb{R}$.

b. Ареакосинус гиперболический: $\operatorname{arcch} x$, являющийся обратной функцией к функции $\operatorname{sh} x$ при $D(\operatorname{sh} x) = [0; +\infty)$; $D(\operatorname{arcch} x) = [1; +\infty)$.
c. Ареатангенс гиперболический: $\operatorname{arcth} x$, являющийся обратной функцией к функции $\operatorname{th} x$; $D(\operatorname{arcth} x) = \mathbb{R}$.
d. Ареакотангенс гиперболический: $\operatorname{arccth} x$, являющийся обратной функцией к функции $\operatorname{cth} x$; $D(\operatorname{arccth} x) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 4.1.2. Следующие функции являются элементарными:

1) $y = \sin\cos x$;
2) $y = 2x + \arcsin x$;
3) $y = 5\lg^2 x$; 4) $y = \sin\cos x$;
5) $y = \frac{\sin}{x+2} 2x - \lg_x x$;

Пример 4.1.3. Следующие функции не являются элементарными:

-1, если $x < 0$; 1) Сигнум икс: $\operatorname{sig} x = \{$
0,если $x = 0$; 1,если $x > 0$.

2) Целая часть икс: $y = [x]$ есть наибольшее целое, не превосходящее x.

Задача 4.1.1. Для степенной функции $y = x^a$ дайте определение операции возведения в степень при:

1) $a = 0$;
2) $a \in \mathbb{N}$;
3) $a \in (\mathbb{Z} \backslash (\mathbb{N} \cup \{0\}))$;
4) $a \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z})$ и $a < 0$; 5) $a \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z})$ и $a > 0$.

Задача 4.1.2. Дайте определение:

1) Логарифма: $\log_a x$; $a \in (P_+ \backslash \{1\})$;
2) тригонометрических функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
3) обратных тригонометрических функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Задача 4.1.3. Приведите примеры элементарных функций.

Задача 4.1.4. Приведите примеры функций, которые не являются элементарными.

4.2 Характеристики числовых функций.

Определение 4.2.2. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу) на множестве* $X \subseteq D$, если существует число $M \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$).

Определение 4.2.3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D$, если она на множестве $X \subseteq D$ ограничена сверху и снизу.

Определение 4.2.4. Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D$, если существует число $M \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Если в определениях 4.1.2 – 4.1.4 $X = D$, то указание “на множестве $X \subseteq D$” опускают.

Если функция $f(x)$ ограничена сверху (снизу) числом M, то в силу транзитивности неравенств она ограничена сверху (снизу) и любым числом большим (меньшим) числа M. Для доказательства ограниченности достаточно указать одно число M.

Пример 4.2.1. Доказать равносильность определений 4.2.3, 4.2.4.

◁ Если функция $f(x)$ ограничена в смысле определения 4.2.3, то существуют числа $M', M'' \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $x \in X$ выполняются неравенства $f(x) \leq M'$ и $f(x) \geq M''$. Для $M = \max\{M';\ -M''\}$ выполняются неравенства $M \geq M'$ и $(M \geq -M'') \Leftrightarrow (-M \leq M'')$ и тогда любого $x \in X$ выполняются неравенства $\big((f(x) \leq M) \wedge (f(x) \geq -M)\big) \Leftrightarrow (|f(x)| \leq M)$. То есть функция $f(x)$ ограничена в смысле определения 4.2.4.

Если функция $f(x)$ ограничена в смысле определения 4.2.4, то существует число $M \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in X$ выполняются неравенства $(|f(x)| \leq M) \Leftrightarrow \big((f(x) \leq M) \wedge (f(x) \geq -M)\big)$. То есть существуют числа $M' = M$ и $M'' = -M$, которые ограничивают функцию $f(x)$ соответственно сверху и снизу. Таким образом, функция $f(x)$ ограничена в смысле определения 4.2.3. ▷

Пример 4.2.2. Записать в символьном виде определение ограниченности сверху функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq D$.

◁ Функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве $X \subseteq D$, если $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall \in x\ X\ f(x) \leq M$. ▷

Пример 4.2.3. Имеют место утверждения:

a) функция $f(x) = \lg(x)$ на множестве $X = (0; 10]$ ограничена сверху ($M = 1$) и не ограничена снизу;

b) функция $f(x) = \lg(x)$ на множестве $X = [100; +\infty)$ ограничена снизу ($M = 2$) и не ограничена сверху;

c) функция $f(x) = \lg(x)$ не ограничена сверху, не ограничена снизу и не ограничена;

d) функция $f(x) = 2^x$ ограничена снизу ($M = 0$), не ограничена сверху и не ограничена.

Определение 4.2.5. *Точной верхней (нижней) границей или верхней (нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq D$* называется точная верхняя (нижняя) граница всех значений $f(x)$, принимаемых на множестве X. Для точной верхней (нижней) границы функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq D$ используют обозначения $\sup\limits_X f$ или $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ ($\inf\limits_X f$ или $\inf\limits_{x \in X} f(x)$). Если $X = D$, то указание “на множестве $X \subseteq D$” опускают и используют обозначения $\sup f$ или $\sup f(x)$ ($\inf f$ или $\inf f(x)$).

Пример 4.1.4. Имеют место утверждения:

a) $\sup\limits_{x \in [-\pi;\, 0]} \sin(x) = 0$;

b) $\sup\limits_{x \in (-\pi;\, 0)} \sin(x) = 0$;

c) $\inf\limits_{x \in [-\pi;\, 0]} \sin(x) = -1$;

d) $\sup \sin(x) = 1$;

e) $\inf \sin(x) = -1$;

f) $\inf 2^x = 0$;

g) $\sup 2^x$ не существует.

Определение 4.2.6. Значение $f(x_0)$ называется *наибольшим (наименьшим) на множестве $X \subseteq D$*, если, во-первых, $x_0 \in X$ и, во-вторых, для любого $x \in X$ имеет место неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$. Для наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq D$ используют обозначения $\max\limits_X f$ или $\max\limits_{x \in X} f(x)$ ($\min\limits_X f$ или $\min\limits_{x \in X} f(x)$). Если $X = D$, то указание “на множестве $X \subseteq D$” опускают и используют обозначения $\max f$ или $\max f(x)$ ($\min f$ или $\min f(x)$). Наибольшее (наименьшее) значение функции на множестве $X \subseteq D$ называют также *максимальным (минимальным)* значением функции на множестве $X \subseteq D$.

Пример 4.2.5. Имеют место утверждения:

a) $\max\limits_{x \in [-\pi;\, 0]} \sin(x) = 0$;

b) $\max\limits_{x \in (-\pi;\, 0)} \sin(x)$ не существует;

c) $\min\limits_{x \in [-\pi;\, 0]} \sin(x) = -1$;

d) $\max \sin(x) = 1$;

e) $\min \sin(x) = -1$;

f) $\min 2^x$ не существует;

g) $\max 2^x$ не существует.

Теорема 4.2.1. Если существует $\max\limits_{x \in X} f(x)$ $(\min\limits_{x \in X} f(x))$, то существует $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in X} f(x))$, причем $\sup\limits_{x \in X} f(x) = \max\limits_{x \in X} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in X} f(x) = \min\limits_{x \in X} f(x))$.

Из существования $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in X} f(x))$ в общем случае не следует существования $\max\limits_{x \in X} f(x)$ $(\min\limits_{x \in X} f(x))$.

Доказательство теоремы 4.2.1 отнесено к задачам.

Определение 4.2.7. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей) на множестве* $X \subseteq D$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей (строго убывающей) на множестве* $X \subseteq D$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Функция $f(x)$ называется *монотонной*, если она возрастающая или убывающая. Функция $f(x)$ называется *строго монотонной*, если она строго возрастающая или строго убывающая.

Следствие 4.2.1. Так как по следствию 3.7.19 $(f(x_1) < f(x_2)) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$, то строго возрастающая функция является возрастающей, строго убывающая функция является убывающей, строго монотонная функция является монотонной.

Существует другая терминология, в которой функции, возрастающие (убывающие) в смысле определения 4.2.7, называются неубывающими (невозрастающими), а функции, строго возрастающие (строго убывающие) в смысле определения 4.2.7, называются возрастающими (убывающими).

Пример 4.2.6. Имеют место утверждения:

a) Функция $f(x) = \sin(x)$ строго возрастает на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) Функция $f(x) = \sin(x)$ строго убывает на множестве $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

c) Функция $f(x) = \sin(x)$ возрастает (но не строго) на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left\{\frac{5\pi}{2}\right\}$;

d) Функция $f(x) = \sin(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей;

e) Функция $f(x) = 2^x$ является строго возрастающей;

f) Функция $f(x) = 5$ является и возрастающей и убывающей одновременно.

Определение 4.2.8. Функция $f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если $f(x) = f(-x)$ $(f(x) = -f(-x))$ для любого $x \in D$. **Пример 4.2.7.** Имеют место утверждения:

a) Функция $f(x) = \sin(2x)$ является нечетной;

b) Функция $f(x) = -\cos(x)$ является четной;

c) Функция $f(x) = \sin(2x + 1)$ не является ни четной, ни нечетной;

d) Функция $f(x) = 2^x$ не является ни четной, ни нечетной;

e) Функция $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ является четной;

f) Функция $f(x) = x^2$ является четной;

g) Функция $f(x) = x^3$ является нечетной;

h) Функция $f(x) = 0$ является одновременно и четной, и нечетной.

Определение 4.2.9. Число $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ называется *периодом функции* $f(x)$, если $\forall x \in D$ имеет место утверждение $(x + T \in D)\wedge(x - T \in D)\wedge(f(x + T) = f(x))$. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если она имеет период.

Если T – период функции $f(x)$, то $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ число nT также является периодом функции $f(x)$.

Существует определение периодической функции, в котором $T \in P_+$.

Пример 4.2.8. Имеют место утверждения:

a) Функция $f(x)$=$-\sin(2x+1)$ имеет период π;

b) Функция $f(x)$=$-\sin(2x+1)$ имеет период 2π;

c) Функция $f(x)$=$-\sin(2x+1)$ не имеет периода $\frac{\pi}{2}$;

d) Функция $f(x)$=$-tg(2x)$ имеет период $\frac{\pi}{2}$;

e) Функция $f(x)$=$\sqrt{\sin(2x+1)+2}$ имеет период π;

f) Функция $f(x)=2^x$ не является периодической;

g) Любое число $T\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ является периодом функции $f(x)$=-1.

Задача 4.2.1. Запишите в символьном виде определение:

a) ограниченности снизу функции $f(x)$ на множестве $X\subseteq D$;

b) ограниченности функции $f(x)$ на множестве $X\subseteq D$;

c) ограниченности сверху функции $f(x)$;

d) ограниченности снизу функции $f(x)$;

e) ограниченности функции $f(x)$.

Задача 4.2.2. Укажите, является ли функция $f(x)$ на множестве $X\subseteq D$ ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной:

a) $f(x)=\sin(x)$; $X=[-1;1]$;

b) $f(x)=\cos(x)$; $X=(-1;1)$;

c) $f(x)=\operatorname{tg}(x)$; $X=(-1;1)$;

d) $f(x)=\operatorname{tg}(x)$; $X=\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$;

e) $f(x)=\operatorname{tg}(x)$; $X=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

f) $f(x)=\operatorname{tg}(x)$; $X=\left(-1;\frac{\pi}{2}\right)$;

g) $f(x)=2^x$; $X=(-\infty;1)$;

h) $f(x)=2^x$; $X=(1;+\infty)$.

Задача 4.2.3. Укажите, является ли функция $f(x)$ ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной:

a) $f(x)=\sin(x)$;

b) $f(x)=|x|$;

c) $f(x)=\sin(x)+\operatorname{tg}(x)$;

d) $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$;

e) $f(x)=\operatorname{tg}^2(x)$;

f) $(x)=2^x$.

Задача 4.2.4. Найдите точные верхние и нижние границы функций:

a) $\sup\limits_{x\in[-\pi;\,0]} \cos(x)$;

b) $\sup\limits_{x\in[-\pi;\,0]} \cos^2(x)$;

c) $\inf\limits_{x\in(-\pi;\,0)} \cos(x)$;

d) $sup \cos(x)$;

e) $inf \cos(x)$;

f) $sup \cos^2(x)+1$;

g) $inf \cos^2(x)-1$;

h) $sup\, 3^{2x}$;

i) $inf\, 3^{2x}$.

Задача 4.2.5. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

a) $\max\limits_{x\in[-\pi;\,0]} \cos(x)$;

b) $\max\limits_{x\in[-\pi;\,0]} \cos^2(x)$;

c) $\min\limits_{x\in(-\pi;\,0)} \cos(x)$;

d) $max \cos(x)$;

e) $miv \cos(x)$;

f) $max \cos^2(x)+1$;

g) $min \cos^2(x)-1$;

h) $max\, 3^{2x}$;

i) $min\, 3^{2x}$.

Задача 4.2.6. Доказать теорему 4.2.1.

Задача 4.2.7. Для каждой из функций укажите, является ли она на множестве X возрастающей, убывающей, строго возрастающей, строго убывающей:

a) $f(x)=-cos(x);\ X=[0;\pi]$;

b) $f(x)=cos(x);\ X=(\pi;\,2\pi)$;

c) $f(x)=cos(x);\ X=(\pi;\,2\pi)\cup\{4\pi\}$;

d) $f(x)=cos(x);\ X=[\pi;\,2\pi]\cup\{4\pi\}$;

e) $f(x)=cos(x); X=[\pi;\,2\pi]\cup\{3\pi\}$;

f) $f(x)=-3^x+1; X=[0;+\infty)$;

g) $f(x)=-1; X=(-\infty;1)$.

Задача 4.2.8. Для каждой из функций укажите, является ли она возрастающей, убывающей, строго возрастающей, строго убывающей:

a) $f(x) = x^2$;
b) $f(x) = x^3$;
c) $f(x) = cos(x)$;
d) $f(x) = -7^x - 1$;
e) $f(x) = tg(x)$;
f) $f(x) = -5 \cdot lg(x)$;
g) $f(x) = -7$.

Задача 4.2.9. Укажите какие из функций являются четными, а какие – нечетными:

a) $f(x)$=$-\sin(5x)$;
b) $f(x) = \cos(2x)$;
c) $f(x)$= $\cos(x + 2)$;
d) $f(x)$= $\cos(x + \pi)$;
e) $f(x)$= $\cos(x) + \pi$;
f) $f(x)$= $\sin(x) + \pi$;
g) $f(x)$= $\arcsin(x)$;
h) $f(x)$= $\arccos(x)$;
i) $f(x) = 5^x$;
j) $f(x) = 5^x + 5^{-x}$.

Задача 4.2.10. Укажите какие из функций являются периодическими и для каждой периодической функции укажите один из периодов:

a) $f(x)$=$\cos(5x - 2)$;
b) $f(x)$=$1 - \cos(5x - 2)$;
c) $f(x)$=$2+\cos^3(5x - 2)$;
d) $f(x)$=$ctg\ (2x + 5)$;
e) $f(x)$=$\sqrt{\sqrt{\cos(3x - 1) + 2} + 1}$;
f) $f(x) = 3^x$;
g) $f(x) = 7$.

4.3 График функции в прямоугольной системе координат

Определение 4.3.1. *Осью координат* Ox называется прямая l, для которой указано направление, начало координат и единица измерения отрезков (масштаб). Между множеством точек оси координат Ox и множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$ может быть определено биективное отображение $T = \{(t; x) | t \in Ox; x \in \mathbb{R}\} \subseteq Ox \times \mathbb{R}$. Для каждой пары $(t; x) \in T$ число $x \in \mathbb{R}$ называется *координатой* точки t на оси Ox.

Определение 4.3.2. *Прямоугольной системой координат* Oxy *на плоскости* P называются две перпендикулярные оси координат Ox и Oy, которые принадлежат плоскости и пересекаются в своих началах координат. Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy называется *осью ординат*. Определяется биективное отображение между множеством точек плоскости P и множеством пар проекций этих точек на оси Ox и Oy: $V = \{(p; (p_x; p_y)) \mid p \in P; p_x \in Ox; p_y \in Oy\} \subseteq P \times (Ox \times Oy)$. Тем самым, определяется биективное отображение между множеством точек плоскости P и множеством пар вещественных чисел: $W = \{(p; (x; y)) \mid p \in P; x$ – координата точки p_x отображения V; y – координата точки p_y отображения $V\} \subseteq P \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Для каждого элемента $(p; (x; y)) \in W$ пара чисел $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ называется *координатами* точки p, число $x \in \mathbb{R}$ называется *абсциссой* точки p, число $y \in \mathbb{R}$ называется *ординатой* точки p.

Определение 4.3.3. Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

Свойства графика функции:

1) Любая прямая $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$, параллельная оси ординат, или не пересекается с графиком функции, или пересекается с графиком функции в одной точке.

2) Любая прямая $y = b$ $(b \in \mathbb{R})$, параллельная оси абсцисс, или не пересекается с графиком биективной функции, или пересекается с графиком биективной функции в одной точке.

3) График функции $f(x)$, ограниченной снизу, расположен не ниже горизонтальной прямой $y = inf f$. График функции $f(x)$, ограниченной сверху, расположен не выше горизонтальной прямой $y = sup f$. График ограниченной функции $f(x)$ расположен в полосе между горизонтальными прямыми $y = inf f$ и $y = sup f$, включая сами эти прямые.

4) График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5) График функции $f(x)$ и график обратной функции $f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

6) График периодической функции с периодом $T > 0$ может быть получен последовательными сдвигами на величину T вправо и влево любой его части, расположенной в вертикальной полосе шириной T.

Пример 4.3.1. Доказать свойство 1 графика функции.

⊲ По определению функции $f(x)$ для каждого $x \in D$ существует *единственное* значение функции $y = f(x)$. Это означает, что каждой абсциссе $a \in D$ графика функции $f(x)$ соответствует *единственное* значение ординаты $b = f(a)$. То есть, график функции $f(x)$ при $x = a$ имеет одну общую точку $b = f(a)$ с вертикальной прямой $x = a$ и не имеет общих точек с остальными вертикальными прямыми. ⊳

Пример 4.3.2. Рисунки 4.3.1 – 4.3.3 иллюстрируют свойство 3 графика функции. На рисунке 4.3.1 изображен график ограниченной снизу функции $y = 2^x - 1$, расположенный не ниже горизонтальной прямой $y = \inf(2^x - 1) = -1$. На рисунке 4.3.2 изображен график ограниченной сверху функции $y = 2 - |x|$, расположенный не выше горизонтальной прямой $y = \inf(2 - |x|) = 2$. На рисунке 4.3.3 изображен график ограниченной функции $y = 2^{-x^2} + 1$, расположенный в полосе между горизонтальными прямыми $y = inf(2^{-x^2} + 1) = 1$ и $y = sup(2^{-x^2} + 1) = 2$.

Пример 4.3.3. На рисунках 4.3.4 – 4.13. изображены графики основных элементарных функций:

1) На рисунке 4.3.4 изображены графики постоянных функций: $f(x) = 2$; $\varphi(x) = 0$; $\omega(x) = -3$.

2) На рисунке 4.3.5 изображены графики степенных функций: $f(x) = x$; $\varphi(x) = x^2$; $\omega(x) = x^3$. График функции $\varphi(x) = x^2$ иллюстрирует свойство 4 – симметричность четной функции относительно оси ординат. График функции $\omega(x) = x^3$ иллюстрирует свойство 4 – симметричность нечетной функции относительно начала координат.

3) На рисунке 4.3.6 изображены графики степенных функций: $f(x) = x^{-1}$; $\varphi(x) = x^{-2}$; $\omega(x) = x^{-3}$.

4) На рисунке 4.3.7 изображены графики степенных функций: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; $\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; $\omega(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$.

5) На рисунке 4.3.8 изображены графики показательных функций: $f(x) = 2^x$; $\varphi(x) = (1)^x$.

2

6) На рисунке 4.3.9 изображены графики логарифмических функций: $f(x) = \log_2 x$; $\varphi(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Графики логарифмических функций иллюстрируют свойство 5 – симметричность относительно прямой $y = x$ графикам соответствующих показательных функций, приведенных на рисунке
4.3.8.

7) На рисунке 4.3.10 изображены графики тригонометрических функций: $y = \sin x$; $y = \cos x$. Эти графики иллюстрируют свойство 6: каждый из этих графиков может быть получен последовательными сдвигами на величину 2π вправо и влево любой его части, расположенной в вертикальной полосе шириной 2π.

8) На рисунке 4.3.11 изображены графики тригонометрических функций: $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$. Эти графики иллюстрируют свойство 6: каждый из этих графиков может быть получен последовательными сдвигами на величину π вправо и влево любой его части, расположенной в вертикальной полосе шириной π.

9) На рисунке 4.3.12 изображены графики обратных тригонометрических функций: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$.

10) На рисунке 4.3.13 изображены графики обратных тригонометрических функций: $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

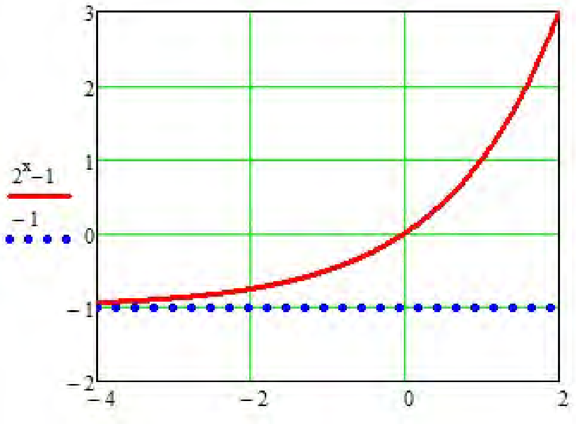


Рис. 4.3.1

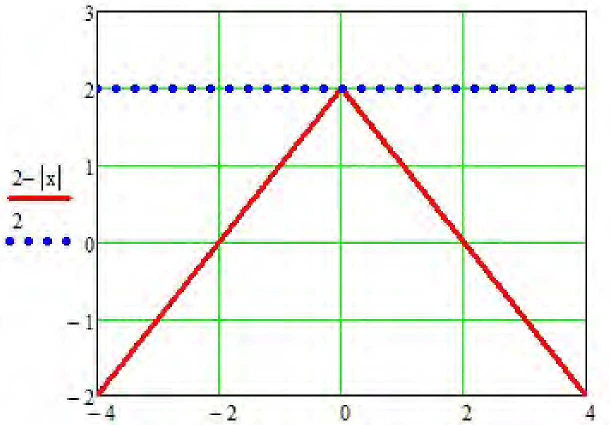


Рис. 4.3.2

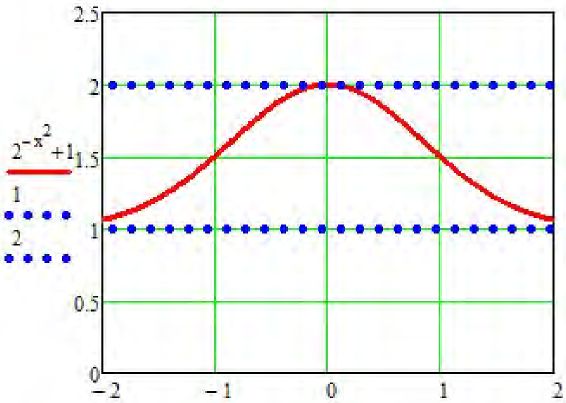


Рис. 4.3.3

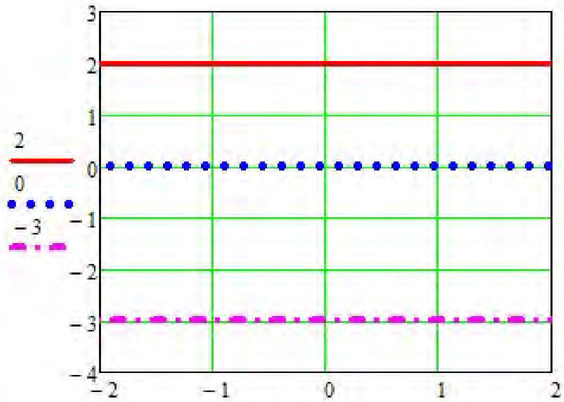


Рис.4.3.4.

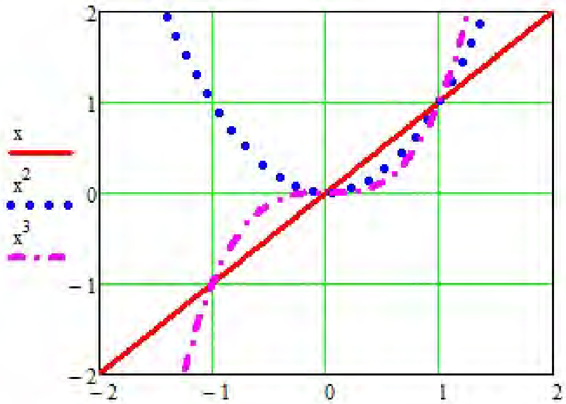


Рис. 4.3.5.

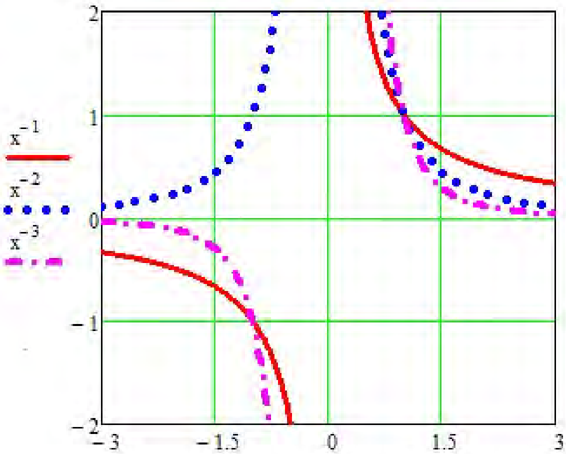


Рис.4.3.6.

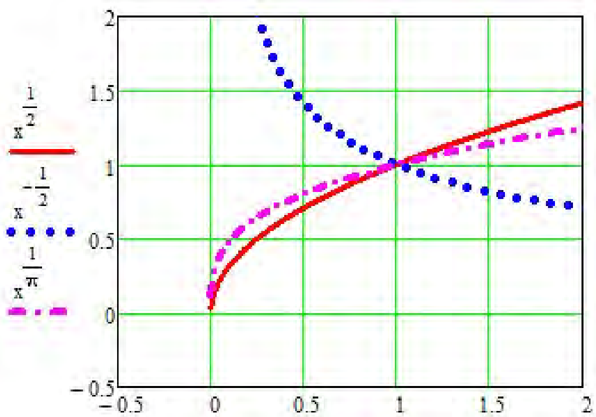


Рис. 4.3.7.

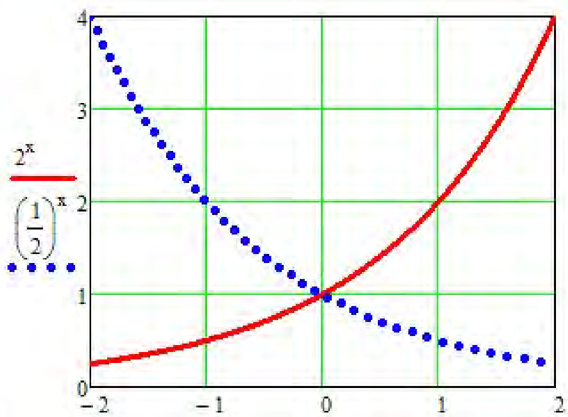


Рис.4.3.8.

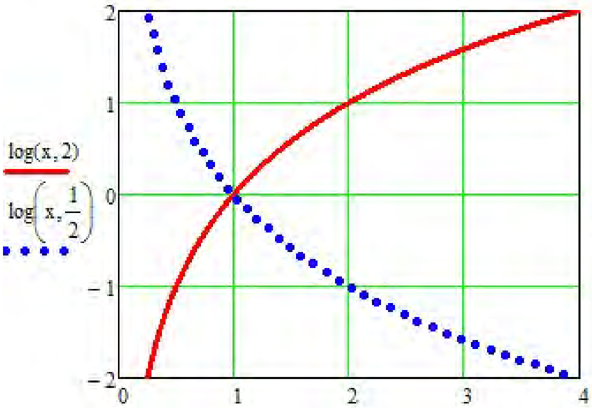


Рис. 4.3.9.

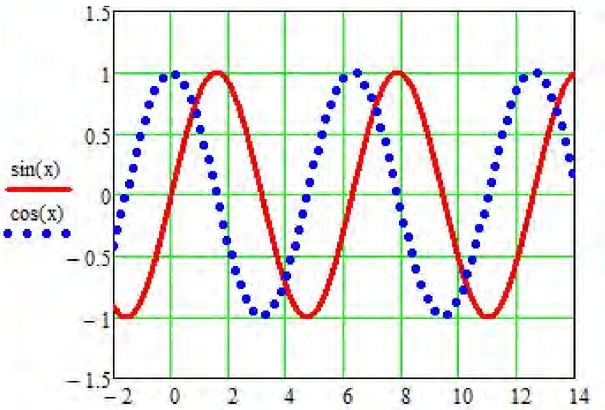


Рис. 4.3.10.

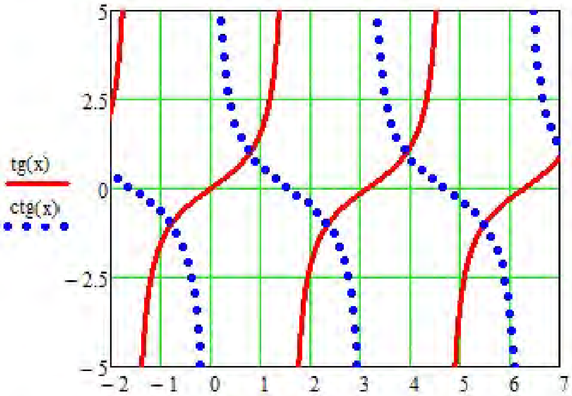


Рис. 4.3.11.

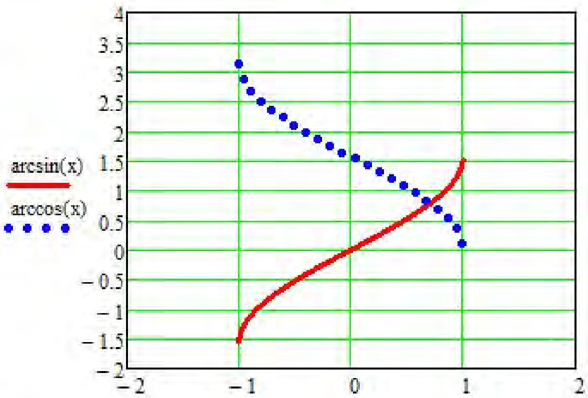


Рис. 4.3.12.

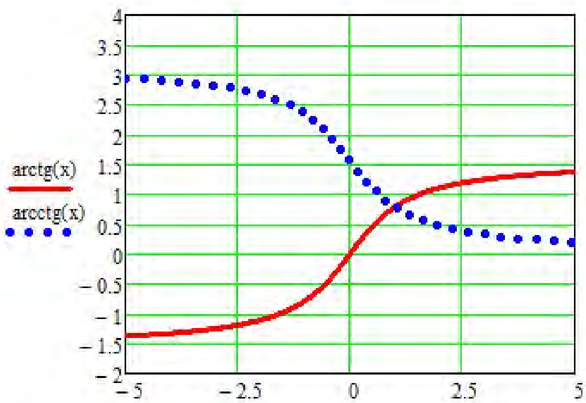


Рис. 4.3.13.

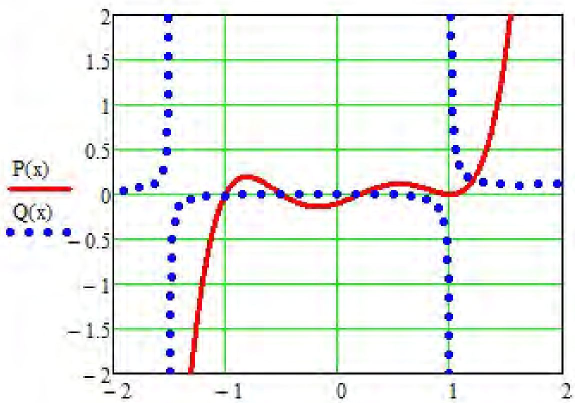


Рис. 4.3.14.

Пример 4.3.4. На рисунках 4.3.14 – 4.3.18 изображены графики наиболее известных элементарных функций:

1) На рисунке 4.3.14 изображены графики многочлена пятой степени $P_n(x) = -0.1 + 0.4x + 0.8x^2 - 1.4x^3 - 0.7x^4 + x^1$ и рациональной дроби

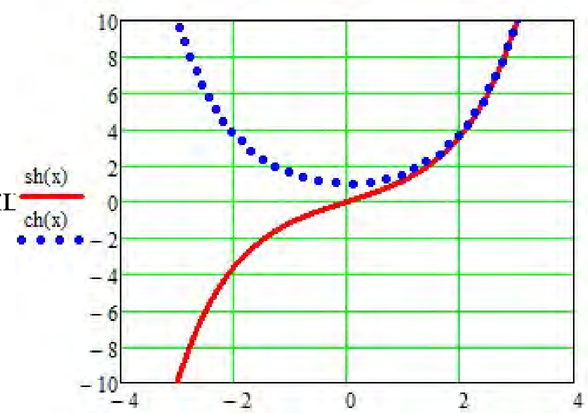
$$Q(x) = \frac{-0.35+0.2x+x^2}{-40.56+29.12x+20.34x^2-9.9x^3+x^4}.$$

2) На рисунке 4.3.15 изображены графики гиперболических функций: sh x; ch x.

3) На рисунке 4.3.16 изображены графики гиперболических функций: th x; cth x.

4) На рисунке 4.3.17 изображены графики обратных гиперболических функций: arcsh x; arcch x.

функц



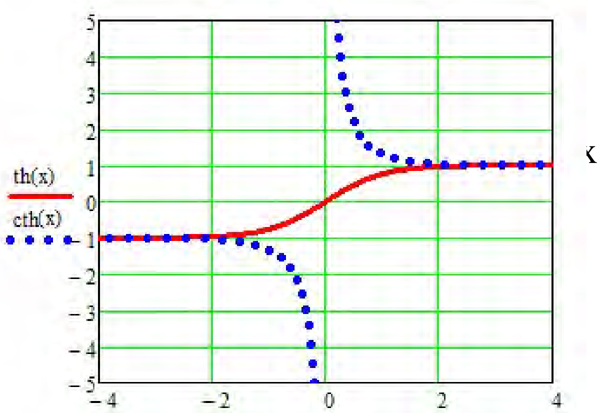
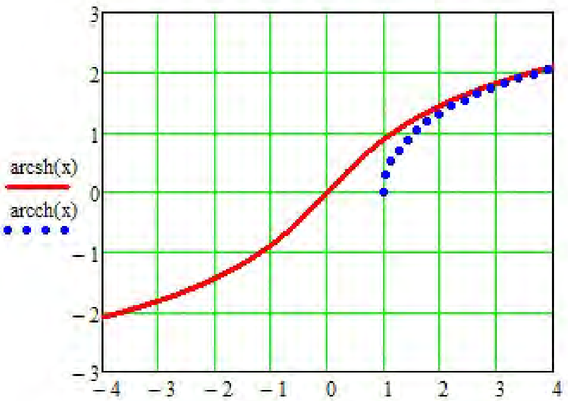


Рис. 4.3.15. Рис. 4.3.16.



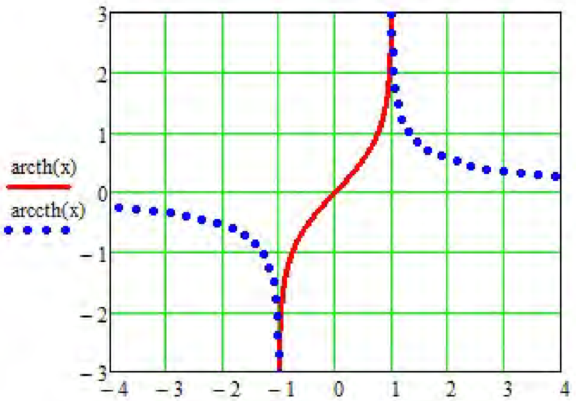
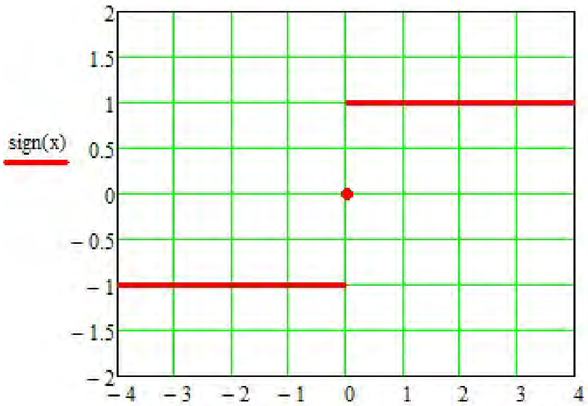


Рис. 4.3.17. Рис. 4.3.18.

Пример 4.3.5. На рисунках 4.3.19 и 4.3.20 изображены графики функций, не являющихся элементарными:

-1,если $x < 0$; 1) Сигнум икс: $\operatorname{sign}(x) = \{$
0, если $x = 0$; 1, если $x > 0$.

2) Целая часть икс: $f(x) = [x]$ есть наибольшее целое, не превосходящее x.



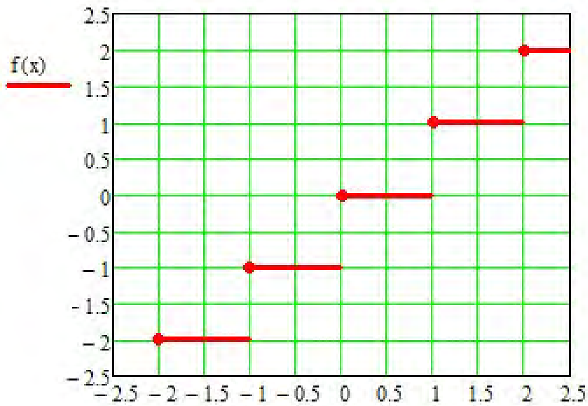


Рис. 4.3.19. Рис. 4.3.20

График функции $f(x)$ в ряде случаев может быть получен путем преобразования известного графика функции $g(x)$. Простейшие из таких преобразований приведены в таблице 4.3.1.

Таблица 4.3.1

№	Функция $g(x)$	Преобразование графика функции $f(x)$
1	$f(x) + c$,	Сдвиг вдоль оси ординат на величину $\lvert c\rvert$ $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ вверх, если $c > 0$, или вниз, если $c < 0$.
2	$f(x + c)$,	Сдвиг вдоль оси абсцисс на величину $\lvert c\rvert$ $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ влево, если $c > 0$, или вправо, если $c < 0$.
3	$f(-x)$	Симметричное отображение относи-

		тельно оси ординат
4	$-f(x)$	Симметричное отображение относительно оси абсцисс
5	$af(x)$, $a \in P_+$	Умножение каждой ординаты на a, т.е. растяжение (при $a > 1$) или сжатие (при $a < 1$) в a раз графика вдоль оси ординат
6	$f(ax)$, $a \in P_+$	Деление каждой абсциссы на a, т.е. растяжение (при $a < 1$) или сжатие (при $a > 1$) в a раз графика вдоль оси абсцисс

Пример 4.3.6. На рисунках 4.3.21 – 4.3.26 изображены графики, полученные из графика функции $f(x) = 2^x$ путем преобразований, приведенных в таблице 4.3.1.

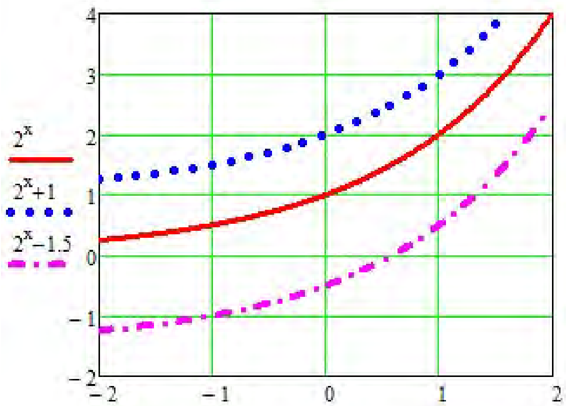


Рис. 4.3.21.

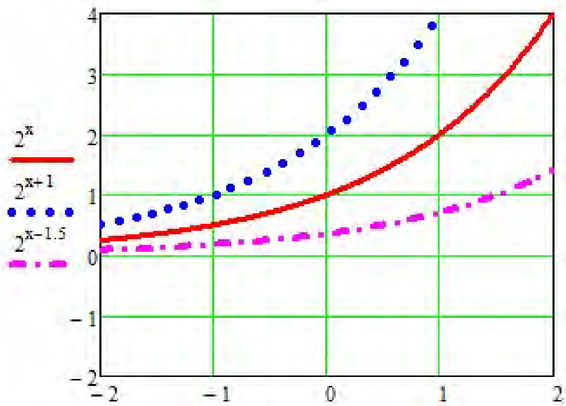


Рис. 4.3.22.

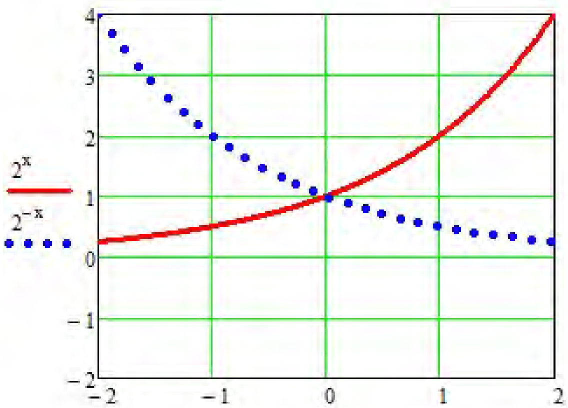


Рис. 4.3.23.

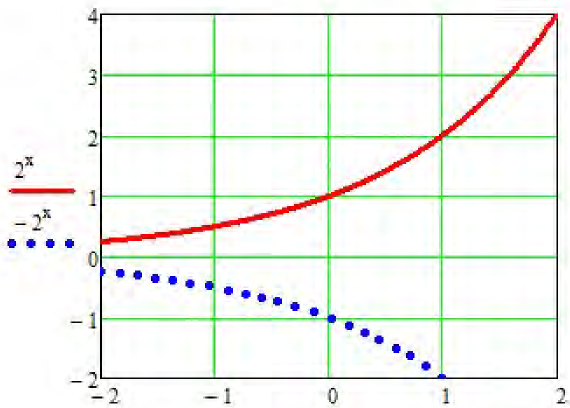
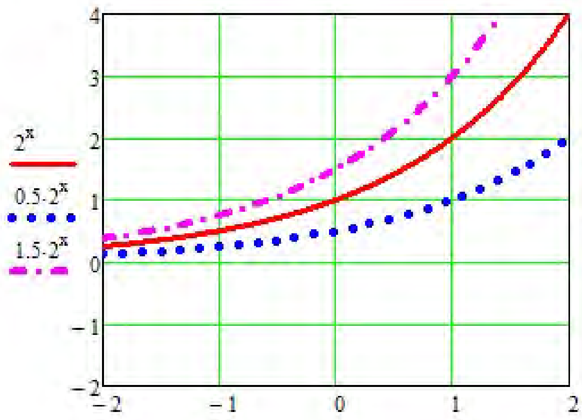


Рис. 4.3.24.



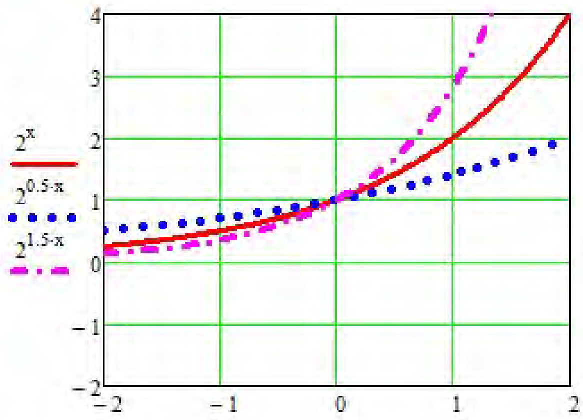


Рис. 4.3.25. Рис. 4.3.26.

Задача 4.3.1. Докажите свойство 2 графика функции.

Задача 4.3.2. Постройте графики функций и укажите, какими из свойств 1 – 6 обладает каждый из графиков:

1) $y = 5x + 2$;
2) $y = x^2 - 2x + 3$; 3) $y = 5$;
4) $y = 5\sin(2x - \pi)$;
5) $y = -2\cos(0.5x + 1)$; 6) $y = 2tg(x - 1) - 1$.
7) $y = 5ctg(2x + 2) - 2$;
8) $y = \arcsin(2x + 5)$;
9) $y = 2\arccos(x - 1)$;
10) $y = -3^{-x}$; 11) $y = \lg(x - 1)$;
12) $y = \mathrm{sign}(x) - \mathrm{sign}(x - 1)$.

РАЗДЕЛ 5 ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.1 Понятие предела числовой последовательности

Определение 5.1.1. *Последовательностью* называется функция $f: \mathbb{N} \to X$, область определения которой есть множество натуральных чисел.

Значение $f(n)$ называется n – м членом последовательности и обозначается $x_n := f(n)$. Для последовательности приняты обозначения $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Определение 5.1.2. *Числовой последовательностью* называется последовательность со значениями во множестве вещественных чисел $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *постоянной*, если $\forall N \in \mathbb{N}\colon x_n = a \in \mathbb{R}$.

В разделе 5 будут рассматриваться числовые последовательности, которые для краткости будем называть последовательностями.

Пример 5.1.1. Примеры последовательностей приведены в таблице 5.1.1.

Таблица 5.1.1. Примеры последовательностей

№	x_n	$\{x_n\}$
1)	1	$1; 1; 1; \dots; 1; \dots$
2)	$(-1)^n$	$-1; 1; -1; 1; \dots; (-1)^n; \dots$
3)	n	$1; 2; 3; \dots; n; \dots$
4)	$(-1)^{n+1}n$	$1; -2; 3; -4; \dots; (-1)^{n+1}n; \dots$
5)	$\frac{1}{n}$	$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$
6)	$(-1)^n\frac{1}{n}$	$-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; (-1)^n\frac{1}{n}; \dots$
7)	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{n}{n+1}; \dots$
8)	$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$	$1; 0; -1; 0; 1; \dots; \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right); \dots$
9)	$x_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{нечетно}; \\ 2, & \text{если } n - \text{четно}; \end{cases}$	$0; 2; 0; 2; \dots$
10)	x_n есть запись в виде десятичной дроби приближенного значения числа $\sqrt{2}$ с точностью до n значащих цифр	$1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; \dots$

Определение 5.1.4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого вещественного числа > 0 существует натуральное число N, такое, что для любого натурального числа $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| <$.

Для высказывания "a является пределом $\{x_n\}$" принято обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to\infty$.

Доказательство равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ на основании определения 5.1.4 заключается обычно в том, что записывают неравенство $|x_n - a| <$, от которого с помощью эквивалентных переходов и следствий, справедливых $\forall\varepsilon > 0$, переходят к неравенству $n > f(\ )$, где $f(\ )$ есть некоторая функция аргумента , определенная при > 0. Если указанный переход произведен, то в качестве N определения 4.1.4 можно взять любое натуральное число, не меньшее значения $f(\varepsilon)$.

Пример 5.1.2. Записать определение 5.1.3 в символьном виде.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \forall\varepsilon > 0\colon\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N :\ |x_n - a| < \quad .$$

Определение 5.1.5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(a)$ точки a существует натуральное число N, такое, что для любого натурального числа $n > N$ все члены последовательности x_n содержатся в $V(a)$.

Пример 5.1.3. Записать определение 5.1.4 в символьном виде.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \forall V(a)\colon\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N :\ x_n \in V(a).$$

Определение 5.1.6. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если любой окрестности $V(a)$ точки a принадлежат все члены последовательности, за исключением, возможно, их конечного числа.

Пример 5.1.4. Доказать равносильность определений предела 5.1.4 и 5.1.5.

◁ $(|x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon) \Leftrightarrow (a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon)$[определение 3.8.9.8] $\Leftrightarrow (x_n \in$ – окрестности точки $a)$ и равносильность определений предела 5.1.3 и 5.1.4 следует из того, что любая – окрестность точки a является окрестностью точки a и в любой окрестности точки a содержится некоторая – окрестность точки a. ◗ **Пример 5.1.5.** Записать определение того, что $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$ в смысле определения 5.1.3.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n \neq a\right) := \exists\varepsilon > 0\colon\ \forall N \in \mathbb{N}\colon\ \exists n > N\ :\ |x_n - a| \geq\ .$$

Определение 5.1.7. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Следствие 5.1.1. Если в последовательности $\{x_n\}$ изменить, в частности – отбросить, конечное число членов, то сходимость последовательности и ее предел, если он существует, не изменятся. **Пример 5.1.6.** Записать пять первых членов последовательности $\{\frac{1}{n}\}$ и доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

◖ Первые пять членов последовательности: $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$. Доказательство проведем на основании определения 4.1.4, для чего найдем значение N, такое, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \ \Leftrightarrow$ $\frac{1}{n} < \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\varepsilon} < n$. Последнее неравенство выполняется при $n > N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, где символом $[a]$ обозначается целая часть числа a – наибольшее целое число, не превосходящее число a. ◗

Пример 5.1.7. Записать пять первых членов последовательности $\left\{1 + \frac{2\cdot(-1)^n}{2n}\right\}$ и доказать, что $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2\cdot(-1)^n}{2n}\right) = 1$.

◖ Первые пять членов последовательности: $-1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{5};\ \ldots$. Доказательство проведем на основании определения 4.1.4, для чего найдем значение N, такое, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|1 + \frac{2\cdot(-1)^n}{2n} - \right.$

n

$2\cdot(-1)$ $\quad$ $2\cdot|(-1)$

$1| <$ $\Leftrightarrow$ $|\underline{\qquad}^{n}| <$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\qquad}^{n|} <$ $\Leftrightarrow$ $\_^{2} <$ $\Leftrightarrow$ $^{2}\_ < n$. Последнее нера-

nnn $\quad$ ε

венство выполняется при $n > N = \left[\frac{2}{}\right]$. ⊳

ε

Пример 5.1.8. Записать приближенные значения с точностью до трех значащих цифр пяти первых членов последовательности $\left\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}$ и доказать,

$\lim \left(\frac{\sin n}{\sqrt{}}\right) = 0$ что .

$n\to\infty$ $\quad$ n

⊲ Первые пять членов последовательности: 0,841; 0,643; 0,0815; -0,378; -0,429; … . Доказательство проведем на основании определения 4.1.4, для чего найдем значение N, такое, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - 0\right| <$ $\Leftrightarrow$ $\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} <$. Для любого $n \in \mathbb{N}$: $(|\sin n| \leq 1) \Leftrightarrow$ $\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ и тогда, если положить $\frac{1}{\sqrt{n}} <$, то будет выполняться требуемое

$\frac{\sin n|}{\sqrt{n}} <$ $|1$ неравенство . Так $\frac{1}{\sqrt{n}} <$ как $n \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{} < \sqrt{n}$ ^{2} $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$\_ < n$. По-

$\varepsilon\varepsilon$

следнее неравенство выполняется при $n > N = \left[\frac{1}{^{2}}\right]$. ⊳

ε

Пример 5.1.9. Записать семь первых членов последовательности $\{n^{(-1)^n}\}$ и доказать, что эта последовательность является расходящейся.

⊲ Первые семь членов последовательности: 1; 2; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{1}{5}$; 6; $\frac{1}{7}$… . Доказательство проведем на основании определения 4.1.6, для чего покажем, что любого $a \in \mathbb{R}$ существует – окрестность $(a - ; a +)$, которой не принадлежит бесконечное число членов последовательности $\{n^{(-1)^n}\}$.

Рассмотрим $a \in P_+$ и бесконечное множество нечетных членов последовательности $x^{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\,(k \in \mathbb{N})$. Положим $= \frac{}{2}a$ и найдем значения $k \in \mathbb{N}$ при которых $\frac{1}{2k-1} < a -$. При $= \frac{a}{2}$: $\left(\frac{1}{2k-1} < a - \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2k-1} < \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow$ $\left(\frac{2}{} < 2k - 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{} + \frac{1}{} < k\right)$. Таким образом, окрестности $\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$ не при-

a $\quad$ $a2$

надлежит бесконечное число членов последовательности x_{2k-1} при $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} < k\right)$.

Для $a \in P_{-}$ положим $\varepsilon = \frac{-}{2^a}$ и найдем значения $k \in \mathbb{N}$ при которых $a + \varepsilon = \frac{-a}{2}$: $a + \varepsilon < \frac{1}{2k-1} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < \frac{1}{2k-1}$. При . Так как в рассматриваемом случае $\frac{a}{2} < 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$: $0 < \frac{1}{2k-1}$, то неравенство $\frac{1}{2k-1} < \frac{a}{2}$ будет выполняться для любого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, окрестности $\left(\frac{3a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ не принадлежит бесконечное число членов последовательности x_{2k-1} при $k \in \mathbb{N}$.

Для $a = 0$ положим $= 1$, рассмотрим бесконечное множество четных членов последовательности $x_{2k} = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) и найдем значения $k \in \mathbb{N}$ при которых ($a + \varepsilon = 0 + 1 = 1 < 2k) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k$. Таким образом, окрестности $(-1;\ 1)$ не принадлежит бесконечное число членов последовательности x_{2k} при $k \in \mathbb{N}$. ▷

Примеры 5.1.6 – 5.1.9 показывают, что последовательность может иметь предел, а может и не иметь предела.

Доказательство сходимости последовательности на основании определений 5.1.4 – 5.1.6 требует знания значения предела.

В таблице 5.1.2 приведены основные методы доказательства существования и нахождения пределов, использующие свойства последовательностей, рассмотренные в разделах 5.1-5.10.

Таблица 5.1.2.

Методы доказательства существования и нахождения пределов

№	Метод
1)	Использования определений предела 5.1.4-5.1.6 (раздел 5.1)
2)	Использование ограниченности и монотонности последовательностей (раздел 5.2)
3)	Использование свойств бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей (разделы 5.3, 5.4, 5.6)
4)	Использование предельного перехода в алгебраических выражениях и неравенствах (разделы 5.4, 5.5)
5)	Использование критерия Коши (раздел 5.7)
6)	Использование известных пределов (раздел 5.8)

7) Переход к эквивалентным последовательностям (раздел 5.9)

8) Раскрытие неопределенностей (раздел 5.10)

Задача 5.1.1. Записать определение 5.1.5 в символьном виде.

Задача 5.1.2. Доказать равносильность определений предела 5.1.5 и 5.1.6.

Задача 5.1.3. Записать определение того, что $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$ в смысле определения 5.1.5.

Задача 5.1.4. Записать определение того, что $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$ в смысле определения 5.1.6.

Задача 5.1.5. Доказать следствие 5.1.1.

Задача 5.1.6. Записать семь первых членов последовательностей:

1) $x_n = 5$;

2) $x_n = (-2)^{n+1}$;

3) $x_n = n^2 + 1$;

4) $x_n = \frac{(-2)^n}{n}$;

5) $x_n = \frac{n+1}{n^2+1}$;

6) $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + 2$;

7) $x_n = \begin{cases} n, & \text{если } n - \text{нечетно;} \\ n - 1, & \text{если } n - \text{четно;} \end{cases}$

8) x_n есть запись в виде десятичной дроби приближенного значения числа $\sqrt{3}$ с точностью до $(n + 1)$ значащей цифры;

9) x_n есть запись в виде десятичной дроби приближенного значения числа $\frac{2}{3}$ с точностью до n значащих цифр.

Задача 5.1.7. Используя определения предела последовательности доказать, что выполняются равенства:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$;

2) $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-3n}{5+4n} = -\frac{3}{4}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}} = 1$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot sin(n)+3}{n^2+2n+1} = 0$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = 0$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7\cdot 9^n - 3^n}{5\cdot 9^n + 7\cdot 3^n} = \frac{7}{5}$.

Задача 5.1.8. Используя определения предела последовательности доказать, что последовательность $\{(-1)^n\}$ является расходящейся.

5.2 Свойства предела числовой последовательности

Теорема 5.2.1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то этот предел единственный.

◀ Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\right) \wedge (a \neq b)$. Для простоты доказательства, не умаляя общности, будем считать, что $a < b$. Так как $a < b$, то $\varepsilon = \frac{1}{4}(b - a) > 0$ и существуют ε – окрестности $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \left(\frac{5}{4}a - \frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b\right)$ и $V_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon) = \left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b; -\frac{1}{4}a + \frac{5}{4}b\right)$. Поскольку выполняется неравенство $\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b < \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right) \Leftrightarrow (a < b)$, то $V(a) \cap V(b) = \emptyset$. По определению предела

$$\left(\lim x_n = a\right) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: x_n \in V(a);$$

$$\begin{cases} \infty \\ n\to \end{cases} \Rightarrow$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b\right) \Rightarrow \exists L \in \mathbb{N}: \forall n > L: x_n \in V(b)$.

$\Rightarrow \forall n > \max\{N, L\}:\ x_n \in V(a)$ и $x_n \in V(b)$,

что невозможно, так как ранее доказано, что $V(a) \cap V(b) = \emptyset$. ▷

Определение 5.2.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} : x_n \le M$.

Определение 5.2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N} : M \le x_n$.

Определение 5.2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \le M$.

Следствие 5.2.1. Ограниченная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной сверху числом M и ограниченной снизу числом $(-M)$.

Замечание 5.2.1. Если последовательность $\{x_n\}$ ограниченна сверху числом M, то она ограничена сверху любым числом $A > M$. Если последовательность $\{x_n\}$ ограниченна снизу числом M, то она ограничена снизу любым числом $A < M$.

Пример 5.2.1. Последовательность $\{4n - n^2\} = \{3; 4; 3; 0; -5\}$ ограничена сверху числом $M = 4$, так как $\forall n \in \mathbb{N}$: $(4n - n^2 \le 4) \Leftrightarrow (0 \le (n-2)^2)$. Эта последовательность не ограничена снизу, так как $\forall M \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(4n - n^2 < M) \Leftrightarrow (-M < n^2 - 4n + 4 - 4) \Leftrightarrow (-M + 4 < (n-2)^2)$. Если $M \ge 4$, то последнее неравенство выполняется $\forall n \in \mathbb{N}$. Если $M < 4$, то последнее неравенство выполняется для $n > \sqrt{-M+4} + 2$.

Пример 5.2.2. Последовательность $\{\sqrt{n}\} = \{1;\ \sqrt{2};\ \sqrt{3};\ 2;\ \sqrt{5}; \dots\}$ ограничена снизу числом $M = 1$, так как $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1 \le \sqrt{n}) \Leftrightarrow (1 \le n)$. Эта последовательность не ограничена сверху, так как $\forall M \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\sqrt{n} > M$. Если $M \le 0$, то последнее неравенство выполняется $\forall n \in \mathbb{N}$. Если $M > 4$, то последнее неравенство выполняется для $n > M^2$.

Пример 5.2.3. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots\right\}$ ограничена снизу числом $M = 0$, так как $\forall \in n \mathbb{N}$: $\left(0 \le \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow (0 \le 1)$. Эта последовательность ограничена сверху числом $M = 1$ так как $\forall n \in \mathbb{N}: \left(\frac{1}{n} \leq 1\right) \Leftrightarrow (1 \leq n)$. Таким образом, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена.

Пример 5.2.4. Последовательность $\{(-1)^n n\} = \{-1;\ 2;\ -3;\ 4;\ -5; \dots\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу, то есть не ограничена. Действительно, $\forall M \in \mathbb{R}$ существует $n = 2k\ (k \in \mathbb{N})$ такое, что $((-1)^{2k} 2k = 2k > M) \Leftrightarrow \left(k > \frac{M}{2}\right)$ и существует $n = 2k + 1\ (k \in \mathbb{N})$ такое, что $((-1)^{2k+1}(2k+1) = -2k - 1 < M) \Leftrightarrow \left(k > \frac{-M-1}{2}\right)$.

Теорема 5.2.2. Сходящаяся последовательность ограничена, то есть: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \Rightarrow (\{x_n\}$ – ограничена).

◁ Положим $= 1$, тогда $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: |x_n - a| < 1$. Так как $|x_n| - |a| \leq |x_n - a|$, то из $|x_n - a| < 1$ следует $(|x_n| - |a| < 1) \Leftrightarrow (|x_n| < |a| + 1)$. Положим $M = max\{|x_1|; \dots ; |x_{n-1}|; |a| + 1\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}: |x_n| < M$, то есть последовательность $\{x_n\}$ – ограничена. ▷

Пример 5.1.6 и задача 5.1.7 показывают, что ограниченная последовательность может иметь, а может и не иметь предела.

Определение 5.2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall N \in \mathbb{N}: x_n < x_{n+1}$; *неубывающей*, если $\forall N \in \mathbb{N}: x_n \leq x_{n+1}$; *убывающей*, если $\forall N \in \mathbb{N}: x_n > x_{n+1}$; *невозрастающей*, если $\forall N \in \mathbb{N}: x_n \geq x_{n+1}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она неубывающая или невозрастающая. Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Следствие 5.2.2. Так как по следствию 3.7.19 $(x_n < x_{n+1}) \Rightarrow (x_n \leq x_{n+1})$, то возрастающая последовательность является неубывающей, убывающая последовательность является невозрастающей, строго монотонная последовательность является монотонной.

Пример 5.2.5. 1) последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \dots\right\}$ является убывающей и не возрастающей,

2) последовательность $\{n^2\} = \{1;\ 4;\ 9;\ \dots\}$ является возрастающей и не убывающей,

3) последовательность $\left\{\frac{2n+1+(-1)^n}{2}\right\} = \{1;\ 3;\ 3;\ 5;\ 5;\ 7;\ 7;\ \dots\}$ является неубывающей,

4) последовательность $\left\{-\frac{2n+1+(-1)^n}{2}\right\} = \{-1;\ -3;\ -3;\ -5;\ -5;\ -7;\ -7;\ \dots\}$ является не возрастающей,

5) последовательность $\{5\} = \{5;\ 5;\ \frac{1}{9};\ \dots\}$ одновременно является не возрастающей и не убывающей,

6) последовательность $\{(-1)^n n^2\} = \{-1;\ 4;\ -9;\ 25;\ \dots\}$ не является монотонной.

Теорема 5.2.3. Для того чтобы неубывающая последовательность $\{x_n\}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

◁ Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то по теореме 5.2.2 она ограничена и значит по следствию 5.2.1 ограничена сверху. Тем самым доказана достаточность условий теоремы 5.2.3.

Докажем необходимость условий теоремы 5.2.3. Если последовательность $\{x_n\}$ – ограничена сверху, то по следствию 3.7.44: $\exists a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то есть $\forall n > N: |x_n - a| <$. По следствию 3.6.1: $\forall \varepsilon > 0: \exists x_N \in \{x_n\}: a - \varepsilon < x_N \leq a$. Так как последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, то $\forall n > N$: $x_N \leq x_n$, откуда следует $\forall n > N$: $(a - \varepsilon < x_n) \Leftrightarrow (a - x_n < \varepsilon)$. Так как a есть верхняя граница множества $\{x_n\}$, то $\forall n > N: (x_n \leq a) \Leftrightarrow (0 \leq a - x_n) \Rightarrow (a - x_n = |a - x_n|)$ и тогда $\forall n > N: |a - x_n| = |x_n - a| <$.▷

Следствие 5.2.3. Для того чтобы возрастающая последовательность $\{x_n\}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху. Это следует из теоремы 4.2.3 и следствия 4.2.2.

Теорема 5.2.4. Для того чтобы невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.

Следствие 5.2.4. Для того чтобы убывающая последовательность $\{x_n\}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.

Пример 5.2.6. Доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

◁ Докажем сходимость вспомогательной последовательности $\left\{y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$. Последовательность $\{y_n\}$ с положительными членами ограничена снизу числом нуль. Покажем, что эта последовательность убывающая и тем самым докажем по теореме 5.2.4, что эта последовательность сходящаяся. Находим для $n \geq 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^n} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

[неравенство Бернулли 3.8.4 при $\alpha = \frac{1}{n^2-1}$] $\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}$ $\left[\left(1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow (n^2 > n^2-1) \Leftrightarrow (0 > -1)\right] > \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$, откуда следует $y_{n-1} > y_n$.

Покажем, что пределы последовательностей $\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и $\{y_n\}$ равны, что доказывает сходимость последовательности $\{x_n\}$. Для последовательности $\{x_n\}$

$n\to\infty$ n n n $n\to$

-1 $n+1$ $n+1$

находим

$\lim \left(1+-\right) = \lim \left(1+-\right) = \lim \left(\left(1+ \right.\right.$ $\to\infty$ -1

$\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \Big) = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot_{\infty}$ $\frac{1}{} \; {}^{n+1}\Big)$

n $n\to\infty$ $n\to\infty$ $n\to$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$ ▷

n

Определение 5.2.5. $e \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Число e иррациональное, его приближенное значение с точностью до двенадцати значащих цифр $e \approx 2.71828182846$.

Число e широко используется в математике.

Задача 5.2.1. Докажите теорему 5.2.4.

Задача 5.2.2. Докажите следствие 5.2.4.

Задача 5.2.3. Укажите, какие из последовательностей ограничены сверху, ограничены снизу, ограничены, не ограничены:

1) $\{n\}$; 6) $\{\ {}^{n}\}$;
2) $\{-n\}$; $n+1$ n
3) $\{\sin(n)\}$; 7) $\{2 - \frac{(-1)^n 2}{n}\}$;
4) $\{(-1)^{n+1}\}$; 8) $\{n\cdot\sin(\frac{\pi}{2}n)\}$.

5) $\{\frac{1}{n}\}$;

Задача 5.2.4. Укажите, какие из последовательностей являются возрастающими, убывающими, не возрастающими, не убывающими:

1) $x_n = 1$; 6) $x_n = n$;
2) $x_n = (-1)^n$; 7) $x_n = (-1)^n n$;

3) $x_n = n1$; 8) $x_n = (2n1++1+((--11)n)n)n$;

4) $x_n = (-n1)n$; 9) $x_n =$; $\frac{4}{2n+1+(-1)^n}$

5) $x_n = n^n+1$; 10) $x_n = -$ 4 .

Задача 5.2.5. Используя теоремы 5.2.3, 5.2.4 и следствия 5.2.3, 5.2.4 о существовании предела монотонных последовательностей доказать сходимость последовательностей:

$x_n = \frac{1}{n}$ 1);

$x_n = \frac{1}{n+1}$ 2);

$x_n = -\frac{1}{n+2}$ 3);

4) $x_n = nn+1$;

5) $x_n = 2nn$;

$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 6)(всего n знаков корней);

$x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$ 7), где $(2n+1)!!$ есть произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n+1$ сключительно;

$x_1 = 0$; $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 8).

5.3 Бесконечно малые последовательности

Определение 5.3.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой последовательностью*, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. То есть по определению предела 5.1.4 последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью, если $\forall > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|x_n| <$.

Пример 5.3.1. Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ примера 5.1.6 является беско-

$n\ n$

$2\cdot(-1)$

нечно малой последовательностью, последовательность $\left\{1 + \frac{}{2n}\right\}$ примера 5.1.7 не является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 5.3.1. Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) Бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$ ограничена;

2) Если бесконечно малая последовательность $\{x_n = a \in \mathbb{R}\}$ является
постоянной, то $a = 0$;

3) Последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой последовательностью тогда и только тогда, когда последовательность $\{|x_n|\}$ является бесконечно малой последовательностью;

4) Если $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность и $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|y_n| \leq |x_n|$, то $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность;

◀ 1) По определению бесконечно малой последовательности 5.3.1 для $= 1$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|x_n| < 1$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$: $|x_n| \leq \max\{1; |x_1|; \ldots; |x_N|\}$, что доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

2) Если $a \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, что противоречит тому, что по условию $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

3) По определению 5.3.1: а) $\{x_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, если $\forall \varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|x_n| <$; б) $\{|x_n|\}$ является бесконечно малой последовательностью, если $\forall \varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$:
$||x_n|| <$. Так как $||x_n|| = |x_n|$, то условия а) и б) совпадают, то есть последовательности $\{x_n\}$ и $\{|x_n|\}$ являются бесконечно малыми последовательностями одновременно.

4) Если $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, то по определению 5.3.1: $\forall \ > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|x_n| <$. Так как $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|y_n| \leq |x_n|$, то $\forall \varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|y_n| <$, откуда следует, что $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. ▶

Задача 5.3.1. Укажите, какие последовательностей являются бесконечно малыми:

$\overline{}$ 1) $\{1\}$; 4) $\{\sin\_\_\_(n)\}$;

$n+1$ $\underline{(-1)}$ n

$n+2$ $\underline{n}$ 2) $\{n\}$; 5) $\{\lg(n)\}$;

6) $\{1+(-1)^n\}$.

3) $\{\ \}$;

$n+1$

5.4 Предельный переход и арифметические операции

Определение 5.4.1. *Произведением* последовательности $\{x_n\}$ на число $a \in \mathbb{R}$ называется последовательность $a \cdot \{x_n\} \coloneqq \{a \cdot x_n\}$. *Суммой, разностью, произведением и частным* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности $\{x_n\}+\{y_n\} := \{x_n+y_n\}$, $\{x_n\}-\{y_n\} := \{x_n-y_n\}$, $\{x_n\}\cdot\{y_n\} := \{x_n \cdot y_n\}$, $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} \coloneqq \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ определена, если $\forall n \in \mathbb{N}$: $y_n \neq 0$.

Определение 5.4.2. Пусть заданы q последовательностей ($q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$): $\{x_n\}$; $\{y_n\}$; … ; $\{z_n\}$. *Линейной комбинацией* последовательностей $\{x_n\}$; $\{y_n\}$; … ; $\{z_n\}$ называется последовательность $a \cdot \{x_n\} + b \cdot \{y_n\} + \dots + c \cdot \{z_n\}$, где $a, b, \dots, c \in \mathbb{R}$.

Пример 5.4.1. Если $\left\{x_n = \frac{1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n+1}; \dots\right\}$ и $\{y_n = n + (-1)^n 2n\} = \{-1; 6; -3; \dots; n+(-1)^n 2n; \dots\}$, $a = 2$, $b = -3$, то

$a \cdot \{x_n\} = \left\{2 \cdot \frac{1}{2} = 1;\ 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3};\ 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \dots; \frac{2}{n+1}; \dots\right\}$;

$\{x_n + y_n\} = \left\{\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3};\ \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}; \dots; \frac{1}{n+1} + n + (-1)^n 2n; \dots\right\}$;

$\{x_n - y_n\} = \left\{\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2};\ \frac{1}{3} - 6 = -\frac{17}{3};\ \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}; \dots; \frac{1}{n+1} - n - (-1)^n 2n; \dots\right\}$;

$\{x_n \cdot y_n\} = \left\{\frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3} \cdot 6 = 2;\ \frac{1}{4} \cdot (-3) = \right.$

$-\frac{3}{4}$; ...; $\frac{n+(-1)^n 2n}{n+1}$; ...};

$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2} : (-1) = -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3} : 6 = \frac{1}{18};\ \frac{1}{4} : (-3) = -\frac{1}{12};\ \dots;\ \frac{1}{(n+1)(n+(-1)^n 2n)};\ \dots\right\}$;

линейная комбинация $a \cdot \{x_n\} + b \cdot \{y_n\} = \left\{2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot (-1) = 4;\ 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot 6 = -\frac{52}{3};\ 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot (-3) = \frac{19}{2};\ \dots;\ \frac{2}{n+1} - 3(n + (-1)^n 2n);\ \dots\right\}$.

Теорема 5.4.1. Свойства бесконечно малых последовательностей (продолжение свойств теоремы 4.3.1):

1) сумма q ($q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) бесконечно малых последовательностей $\{x_n\} + \{y_n\} + \dots + \{z_n\}$ есть бесконечно малая последовательность;

2) произведение q ($q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) бесконечно малых последовательностей $\{x_n\} \cdot \{y_n\} \cdot \dots \cdot \{z_n\}$ есть бесконечно малая последовательность;

3) произведение $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$ бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ на ограниченную последовательность $\{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность;

4) произведение $a \cdot \{x_n\}$ бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ на число $a \in \mathbb{R}$ есть бесконечно малая последовательность;

5) линейная комбинация $a \cdot \{x_n\} + b \cdot \{y_n\} + \dots + c \cdot \{z_n\}$ ($a, b, \dots, c \in \mathbb{R}$) бесконечно малых последовательностей $\{x_n\}; \{y_n\}; \dots; \{z_n\}$ есть бесконечно малая последовательность;

◄ 1) Так как последовательности $\{x_n\}; \{y_n\}; \dots; \{z_n\}$ бесконечно малые, то $\left(\forall \frac{\varepsilon}{q} > 0 : \exists N_x \in \mathbb{N} : \forall n > N_x : |x_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right) \wedge \left(\forall \frac{\varepsilon}{q} > 0 : \exists N_y \in \mathbb{N} : \forall n > N_y : |y_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right) \wedge \dots \wedge \left(\forall \frac{\varepsilon}{q} > 0 : \exists N_z \in \mathbb{N} : \forall n > N_z : |z_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right)$. Если положить $N = \max\{N_x, N_y, \dots, N_z\}$, то $\forall n > N: \left(\left(|x_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right) \wedge \left(|y_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right) \wedge \dots \wedge \left(|z_n| < \frac{\varepsilon}{q}\right)\right)$ и тогда $|x_n + y_n + \dots + z_n| \le |x_n| + |y_n| + \dots + |z_n| < \frac{\varepsilon}{q} + \frac{\varepsilon}{q} + \dots + \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon$. Следовательно сумма $\{x_n\} + \{y_n\} + \dots + \{z_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

2) Доказательство аналогично доказательству пункта 1) с заменой $\frac{\varepsilon}{q}$ на $\sqrt[q]{\varepsilon}$.

3) Так как $\{y_n\}$ есть ограниченная последовательность, то $\exists M \in P_+$: $\forall n \in \mathbb{N}: |y_n| \le M$. Так как последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, то $\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ и тогда $|x_n \cdot y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$. Следовательно произведение $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

4) Так как $a \cdot \{x_n\} = \{a \cdot x_n\} = \{a\} \cdot \{x_n\}$ и сходящаяся последовательность $\{a\}$ ограничена, то по теореме 5.4.1.3 произведение $a \cdot \{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

5) Каждое из слагаемых линейной комбинации $a \cdot \{x_n\} + b \cdot \{y_n\} + \dots + c \cdot \{z_n\}$ по теореме 5.4.1.4 есть бесконечно малая последовательность и тогда по теореме 5.4.1.1 вся линейная комбинация есть бесконечно малая последовательность. ◊

Теорема 5.4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}: x_n = a + \alpha_n$.

◊ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon)$. Так как $(x_n = a + \alpha_n) \Rightarrow |x_n - a| = |\alpha_n|$, то $(\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N : |\alpha_n| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\{\alpha_n\}$ есть искомая бесконечно малая последовательность). ◊

Лемма 5.4.1. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right) \wedge (b \in \mathbb{R}\{0\}) \wedge (\forall n > N: x_n \neq -b) \Rightarrow \left(\left\{\frac{1}{b+x_n}\right\} - \text{ограничена}\right).$

◁ Так как $\forall n > N: x_n \neq -b$, то последовательность $\left\{\frac{1}{b+x_n}\right\}$ определена. Поскольку $b \neq 0$, то $|b| > 0$ и $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: \left(|x_n| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}\right) \Rightarrow \left(|b + x_n| \geq |b| - |x_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|b+x_n|} < \frac{2}{|b|}\right)$. Если положить $M = \max\left\{\frac{2}{|b|}; \left|\frac{1}{b+x_1}\right|; \left|\frac{1}{b+x_2}\right|; \ldots; \left|\frac{1}{b+x_N}\right|\right\}$, то $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|b+x_n|} < \frac{2}{|b|}$, что доказывает ограниченность последовательности $\left\{\frac{1}{b+x_n}\right\}$. ▷

Теорема 5.4.3. Предельный переход и арифметические операции.

1) $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right)\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b\right).$

2) $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right)\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b\right).$

3) $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right)\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b\right).$

4) $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}: y_n \neq 0) \wedge (b \neq 0)\right) \Rightarrow \left(\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\right);$

$n\to\infty$ y_n b

5) $\left(\lim x_n = a\right) \Rightarrow \left(\forall \alpha \in \mathbb{R}: \left(\lim (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot a\right)\right)$;

$n\to\infty$ $n\to\infty$ 6) $\left(\left(\lim x_n = a\right) \wedge \left(\lim y_n = b\right)\right) \Rightarrow \left(\forall\ \alpha,\ \beta\right.$
$\in \mathbb{R}: \left(\lim (\alpha \cdot x_n) + \right.$ $n\to\infty$ $n\to\infty$ $n\to\infty$

$\lim_{\infty} (\beta \cdot y_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b\big)\big)$ $n\to$

1) Равенства $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$ по теореме 5.4.2 равносильны

$n\to\infty$ $n\to\infty$

существованию бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ таких, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Тогда $x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$. Так как по теореме 4.4.1 сумма $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, то по теореме 5.4.2 $\lim (x_n + y_n) = a + b$.

$n\to\infty$

2) Доказательство теоремы 5.4.3.2 отнесено к задачам.
3) Равенства $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$ по теореме 5.4.2 равносильны

$n\to\infty$ $n\to\infty$

существованию бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ таких, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Тогда $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = (a \cdot b) + (b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n)$. Так как по теореме 5.4.5 линейная комбинация $b \cdot \{\alpha_n\} + a \cdot \{\beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, то по теореме 5.4.2 $\lim (x_n \cdot$

$n\to\infty$ $y_n)$

$= a \cdot b$.

4) Равенства $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$ по теореме 5.4.2 равносильны

$n\to\infty$ $n\to\infty$

существованию бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ таких, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Тогда $xy_{nn} = \frac{}{n} = --- + \frac{}{n} =$

$ab + +\alpha\beta_n$ ab ab $ab + +\alpha\beta_n$

$\frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n+(-a)\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b+\beta_n} \cdot (b\alpha_n + (-a)\beta_n)$. Линейная комбинация $b \cdot \{\alpha_n\} + (-a) \cdot \{\beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ по теореме 4.4.5 есть бесконечно малая последовательность, последовательность $\left\{\frac{1}{b+\beta_n}\right\}$ по лемме 5.4.1 ограничена и тогда по теоремам 5.4.3, 5.4.4 произведение $\frac{1}{b} \cdot \left\{\frac{1}{b+\beta_n}\right\} \cdot \{b\alpha_n + (-a)\beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Следовательно, по теореме 5.4.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

5) Так как $\alpha \cdot \{x_n\} = \{\alpha \cdot x_n\} = \{\alpha\} \cdot \{x_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha = \alpha$, то по теореме 5.4.3.4: $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot a$.

6) По теореме 5.4.1.5: $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (\beta \cdot y_n) = \beta \cdot b$. Тогда по теореме 5.4.3.1: $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (\beta \cdot y_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$. ◊

Пример 5.4.1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^3+3n^2+2n-1}{5n^3+2n^2-5}$.

◊ Преобразуем общий член последовательности, разделив числитель и знаменатель на $n^3 \neq 0$: $x_n = \frac{7+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^3}}$. Так как, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ есть бесконечно малая последовательность, то по теоремам о пределах 5.4.1.2, 5.4.1.3, 5.4.3.4 находим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{7+3\cdot0+2\cdot0\cdot0-1\cdot0\cdot0\cdot0}{5+2\cdot0-5\cdot0\cdot0\cdot0} = \frac{7}{5}$. ◊

Пример 5.4.2. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

◊ Преобразуем общий член последовательности, умножив его на $1 = \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$: $x_n = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\ldots} = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\ldots} = \frac{n^2+2n-n^2}{\ldots}$

$n_2+2n+n \qquad n= \overline{\qquad\sqrt{\ ^2}\qquad} \qquad \overline{\qquad\sqrt{\ ^2}\qquad} \qquad \overline{\sqrt{\ ^2}} \quad n$

$+2n+n \qquad = \qquad\qquad n+2n+n \quad = \quad n+2n+n=$

n

$2\ \sqrt{\ }\ \overline{\qquad}\ n_2+2n+n$. Разделим числитель и знаменатель последнего выражения на

$n \neq 0$: $x_n = 2\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+1}}$. Так как, $\{_n{}^1\}$ есть бесконечно малая последовательность, то по теоремам о пределах $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2\dfrac{1}{\sqrt{1+2\cdot 0+1}} = 1$. ◊

Задача 5.4.1. Сформулируйте теоремы 5.4.3.1 – 5.4.3.6 в словесной форме.

Задача 5.4.2. Докажите теорему 5.3.3.2.

Задача 5.4.3. Запишите формулу общего члена и пять первых членов последовательностей $b \cdot \{x_n\}$; $\{x_n\}+\{y_n\}$; $\{x_n\}-\{y_n\}$; $\{x_n\}\cdot\{y_n\}$; $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$, $a\cdot\{x_n\}+b\cdot\{y_n\}$ для

$\overline{\ 1\ } \qquad \frac{(-1)\ \ n}{}\Big\{x_n = \ {}_{2n+1}\Big\}\Big\{y_n = \ {}_{n+1}^{\ n}\Big\}a=-1$

1) $\{x_n = \lg(n+2)\}$; ; ; $b=\frac{1}{2}$;

2) $\{x_n = \frac{2n-1}{+1}\}$; $\{y_n = \frac{2n^2-1}{+1}\}$; $a=1$; $b=-1$;

3) ; $\{y_n = 2^n\}$; $a=-1$; $b=1$;

4) $\{x_n = \cos(2n)\}$; $\{y_n = \frac{1}{2n+1}\}$; $a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$;

5) $\{x_n = \sin(3n)\}^n \qquad {}^n_{n+1}$; $\{y_n = \cos(3n)\}$; $a=2$; $b=0$;

6) $\left\{x_n = \frac{n}{3n-1}\right\}$; $\left\{y_n = \frac{(-1)\ \ n}{2n+1}\right\}$; $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$;

7) $\{x_n = \lg(n^2+1)\}$; $\{y_n = (-2)^n\}$; $a=2$; $b=3$.

Задача 5.4.4. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^4-7n^2-2n+1}{5n^4+2n^3-1}$;

2) $\lim\limits_{\infty} \frac{-7n^2-2n+1}{5n^4+2n^3-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25n^2+2n+1}-5n\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n+1}-\frac{\sin(2n)}{n}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{2n}-5n^2}{\pi n-\sqrt[4]{7n^8+5}}\right)$.

5.5 Предельный переход и неравенства

Теорема 5.5.1. $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right)\wedge\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right)\wedge(a<b)\right)\Rightarrow(\exists N\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>N\colon x_n<y_n)$.

◁ $(a<b)\Rightarrow\ (\exists c\in\mathbb{R}\colon a<c<b)$. По определению предела $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right)\Leftrightarrow\ (\forall\delta=c-a>0\colon\ \exists L\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>L\colon\ (|x_n-a|<c-a)\Rightarrow(x_n-a<c-a)\Leftrightarrow(x_n<c))$ и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right)\Leftrightarrow\left(\forall\delta=b-c>0\colon\ \exists K\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>K\colon\ (|b-y_n|<b-c)\ \Rightarrow\ (b-y_n<b-c)\ \Leftrightarrow(c<y_n)\right)$. При $n>N=max\{L;K\}$ выполняются неравенства $x_n<c$ и $c<y_n$, из которых следует $x_n<y_n$. ▷

Теорема 5.5.2. $\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\right)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}\colon x_n\le z_n\le y_n)\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

◁ Теорема 5.5.2 будет доказана, если показать $\forall\varepsilon>0\colon\ \exists N\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>N\colon\ |z_n-a|<$.

По определению предела $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\colon\ \exists L\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>L\colon(|x_n-a|<\varepsilon)\Rightarrow(-\varepsilon<x_n-a)\Leftrightarrow(a-\varepsilon<x_n)\right)$ и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\right)\Leftrightarrow$

$\big(\forall\varepsilon > 0:\ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall n > K:\ (|y_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow (y_n - a < \varepsilon) \Leftrightarrow (y_n < a + \big)\big)$. При $n > N = max\ \{L; K\}$ выполняются неравенства $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a +$, из которых следует $|z_n - a| <$. ⊳

Следствие 5.5.1. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\right) \wedge (\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N:)$

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ x_n > y_n; \\ 2)\ x_n \ge y_n; \\ 3)\ x_n > b; \\ 4)\ x_n \ge b. \end{array}\right. \Rightarrow a \ge b.$$

⊲ Следствия 5.5.1.1 и 5.5.1.2 докажем от противного. Если $a < b$, то по теореме 5.5.1: $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N: x_n < y_n$, что противоречит неравенствам $x_n > y_n$ и $x_n \ge y_n$.

Следствия 5.5.1.3 и 5.5.1.4 есть частные случаи соответственно следствий 5.5.1.1 и 5.5.1.2 при $y_n = b$. ⊳

Пример 5.5.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = 0$.

⊲ Доказательство проведем на основании теоремы 5.5.2 при $z_n = \frac{2^n}{n^n}$.

Выберем $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{2^n}$. Имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и неравенство $x_n \le z_n$. Тогда для доказательства равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = 0$ достаточно показать, что начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $z_n \le y_n$: $\left(\frac{2^n}{n^n} \le \frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow (2^{2n} \le n^n)$. Последнее неравенство выполняется при $n \ge 4$: $n^n \ge 4^n = 2^{2n}$. ⊳

Задача 5.5.1. На основании теоремы 5.5.2 докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+5} = 0$.

1.1. Бесконечно большие последовательности.

Определение 5.6.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой последовательностью*, если $\forall M \in P_+ \colon \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \ \forall n > N \colon \ (|x_n| \geq M)$. В этом случае записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или ($x_n \to \infty$ при $n \to \infty$) и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел.

Определение 5.6.2. Частными случаями бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ являются:

1) $\forall M \in P_+ \colon \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \ \forall n > N \colon \ (x_n \geq M)$. В этом случае записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или ($x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$);
2) $\forall M \in P_+ \colon \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \ \forall n > N \colon \ (x_n \leq -M)$. В этом случае записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или ($x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$).

Следствие 5.6.1. Следствием определений 5.1.4, 5.1.6, 5.6.1 являются утверждения:

1) последовательности делятся на сходящиеся (имеющие пределом вещественное число или, как говорят, имеющие конечный предел) и расходящиеся (не имеющие конечного предела);
2) последовательности делятся на имеющие предел (конечный или бесконечный) и не имеющие предела.

Пример 5.6.1. Последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$ является бесконечно большой последовательностью, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = +\infty$.

◁ Для доказательства $\forall M \in P_+$ найдем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N \colon \left(\left|\dfrac{n^2}{n+1}\right| \geq M\right)$. Так как $\left|\dfrac{n^2}{n+1}\right| = \dfrac{n^2}{n+1} > \dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n - 1$, то неравенство $\left|\frac{n^2}{n+1}\right| \geq M$ будет выполняться, если выполняется неравенство $(n-1 \geq M) \Leftrightarrow (n \geq M+1)$. Таким образом, неравенство $\left|\frac{n^2}{n+1}\right| \geq M$ будет выполняться $\forall n > N$, если в качестве N взять любое натуральное число такое, что $N \geq M+1$. Так как $\forall n > N$ выполняется не только неравенство $\left|\frac{n^2}{n+1}\right| \geq M$, но и неравенство $\frac{n^2}{n+1} \geq M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$. ◗

Пример 5.6.2. Последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$ не является бесконечно большой последовательностью.

◖ Так как $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| < 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} < 1\right) \Leftrightarrow (0 < n)$, то при $M = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| < M$. Следовательно последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$ не является бесконечно большой последовательностью. ◗

Теорема 5.6.1. Свойства бесконечно больших последовательностей:

1) бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ расходится. Расходящаяся последовательность $\{x_n\}$ не обязательно является бесконечно большой;
2) бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Не ограниченная последовательность $\{x_n\}$ не обязательно является бесконечно большой;
3) если $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность и $\forall n > N$: $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ есть бесконечно большая последовательность;
4) если $\{x_n\}$ есть бесконечно большая последовательности и $\forall n > N$: $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ есть бесконечно малая последовательность;

5) Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, … , $\{z_n\}$ есть q $(q \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ бесконечно больших последовательностей таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\ (-\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty\ (-\infty)$, …, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty\ (-\infty)$, то последовательность $\{x_n\} + \{y_n\} + \cdots + \{z_n\}$ есть бесконечно большая последовательность, причем $\lim\limits_{n\to\infty} (\{x_n\} + \{y_n\} + \cdots + \{z_n\}) = +\infty\ (-\infty)$.

6) произведение q $(q \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ бесконечно больших последовательностей $\{x_n\} \cdot \{y_n\} \cdot \ldots \cdot \{z_n\}$ есть бесконечно большая последовательность;

7) произведение $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ на последовательность $\{y_n\}$ такую, что $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $(|y_n| \geq \alpha > 0)$, есть бесконечно большая последовательность;

8) произведение $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$ бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ на последовательность $\{y_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a > 0$, есть бесконечно большая последовательность;

◁ 1) Доказательство проведем от противного. Предположим $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Положим $= 1$ и тогда $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|x_n - a| < 1$ $[|x_n| - |a| \leq |x_n - a|] \Rightarrow$ $(|x_n| - |a| \leq 1) \Leftrightarrow (|x_n| \leq |a| + 1)$. Если положить $M = |a| + 2$, то $\forall n > N$: $|x_n| < M$, то есть последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно большой. Полученное противоречие завершает доказательство.

Приведем пример последовательности, которая расходится, но не является бесконечно большой: $\{(-1)^n\}$.

2) Если $\{x_n\}$ есть бесконечно большая последовательность, то $\forall$ M $\in$ P_+: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $(|x_n| \geq M)$, откуда следует, что $\forall M \in \mathbb{R}$: $\exists x_{N+1}$ такое, что $|x_{N+1}| \geq M$, то есть последовательность $\{x_n\}$ неограничена.

Приведем пример последовательности, которая не ограничена, но не является бесконечно большой: $\{(1 + (-1)^n)n\} = \{0; 4; 0; 8; 0; 12; \ldots\}$.

3) Так как $\forall n > N$: $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{\ }\right\}$ определена.

xn

Так как $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, то $\forall\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N$: $|x_n| <$. $\forall M \in P_+$ можно положить $= \frac{1}{} > 0_M$ и тогда $\forall M > 0$:

$\exists \in N$ $\mathbb{N}$: $\forall n > N$: $(|x_n| < \frac{1}{}) \Leftrightarrow \left(M < \frac{1}{} = \left|\frac{1}{}\right|\right)_{M \quad |xn| \quad xn}$, то есть

последовательность $\left\{\frac{1}{}\right\}$ есть бесконечно большая последовательность.

xn

4) Доказательство теоремы 5.6.1.4 отнесено к задачам.

5) В случае $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = +\infty$ $_{\infty}$ n , …, $\lim z = +\infty$: $(\forall - >_M$

$n\to\infty$ $n\to\infty$ $n\to$ q

M M

$0: \exists N_x \in \mathbb{N}: \forall n >$: N_x xn

$\geq -) \wedge (\forall - > 0: \exists N_y \in \mathbb{N}: \forall n > N_y$:$_q$ $_q$ $y_n \geq$

MMM

$\_q$ $) \wedge \ldots \wedge$ $(\forall - > 0: \exists N_z \in \mathbb{N}: \forall n >_q$ N_z $: z_n$ $\geq -)$ $_q$.

Если положить $N =_{MM}$ $_M$ $\max\{ N_x, N_y, \ldots , N_z\}$, то $\forall n > N$: $\left(\left(x_n \geq -\right) \wedge \left(y_n \geq -\right)_{q \quad q} \wedge \ldots \wedge \left(z_n \geq -\right)\right)_q$ и

M M M

тогда $x_n + y_n + \cdots + z_n \geq - + - + \cdots + - =$

q q $_qM$. Следовательно $_n\lim (\{x_n\} +_\to$

∞

$\{y_n\} + \cdots + \{z_n\}) = +\infty$. Доказательство теоремы 4.6.1.5 для случая $\lim x_n = -\infty$, $\lim y_n = -\infty$, …, $\lim z_n = -\infty$ отнесено к задачам.

$n\to\infty$ $n\to\infty$ $n\to\infty$

6) Доказательство аналогично доказательству пункта 5) с заменой $\frac{M}{q}$

на $\sqrt[q]{M}$.

7) Если $\{x_n\}$ есть бесконечно большая последовательность, то $\forall - \in$
M

α

M
P_+: $\exists L \in \mathbb{N}$: $\forall n > L$: $(|x_n| \geq -_{\alpha})$. Если положить $L = \max\{N, L\}$, то $\forall n >$

K будут выполняться неравенства $|x_n| \geq ^{M}\_{\alpha}$ и $|y_n| \geq \alpha > 0$. Следовательно

$\forall n > K$: $|x_n \cdot y_n| = |x_n| . |y_n| \geq - \cdot \alpha =^{M}{}_{\alpha} M$, то есть последовательность $\{x_n\} \cdot$
$\{y_n\}$ есть бесконечно большая последовательность.

8) Если положить $= \frac{}{2}$ $\quad a$, то из $\lim y_n = a > 0$ следует, что
$\exists \quad \in N$

$n \to \infty$

$\mathbb{N}: \forall n > N: \left(|y_n - a| < \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \left(-\frac{a}{2} < y_n - a\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} < y_n\right)$ и теорема 5.6.1.8 является частным случаем теоремы 5.6.1.7. ▷

2

Задача 5.6.1. Докажите, что последовательность $_2$ $n+2$ $\left\{\frac{}{}\right\}$ $\quad n$
является бесконечно большой последовательностью, причем $\lim \frac{-n}{} = +\infty$
.

$+2$
$n \to \infty$ n $\quad 2$

Задача 5.6.2. Докажите, что последовательность $\left\{\frac{-n}{}\right\}$ является бес-
$n+2$
конечно большой последовательностью, причем $\lim \frac{-n^2}{} = -\infty$.

$n \to \infty$ $n+2$

$(-1)_n n_2$

Задача 5.6.3. Докажите, что последовательность $\left\{\frac{}{n+2}\right\}$ является бесконечно большой последовательностью, причем $\lim \frac{(-1)^n n^2}{} \neq +\infty$ и

$n \to \infty$ $\quad n+2$

$\lim\limits_{\to\infty}$ $\quad n+2$ $\quad - \frac{(-1)^n n^2}{n} \neq \quad \infty$.

$(-1)^n n^2$

Задача 5.6.4. Докажите, что последовательность $\{ \frac{}{n^2+1} \}$ не является бесконечно большой последовательностью.

Задача 5.6.5. Докажите теорему 5.6.1.4. **Задача 5.6.6.** Докажите теорему 5.6.1.5 для случая $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, …, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$.

5.7 Критерий Коши существование предела последовательности

Определение 5.7.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной или последовательностью Коши*, если $\forall\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m > N$: $|x_n - x_m| <$.

Следствие 5.7.1. Отрицание фундаментальности последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной, если $\exists\varepsilon > 0$: $\forall N \in \mathbb{N}$: $\exists n, m > N$: $|x_m - x_n| \geq$.

Теорема 5.7.1. Критерий Коши сходимости последовательности. Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Теорема 5.7.1 приведена без доказательства.

Пример 5.7.1. Записать пять первых членов последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$ и доказать, что эта последовательность расходится.

◁ Пять первых членов последовательности: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$.

Покажем, что последовательность $\{x_n = (-1)^n\}$ не является фундаментальной и, следовательно, расходится по критерию Коши. Положим $= 1$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$: $\exists n = 2N + 1 > N$, $\exists m = 2N + 2 > N$: $|x_m - x_n| = |1 - (-1)| = 2 > 1 =$. ▷

Пример 5.7.2. Записать пять первых членов последовательности $\left\{x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right\}$ и доказать, что эта последовательность расходится.

◁ Пять первых членов последовательности: $1; \frac{3}{2} = 1.5; \frac{11}{6} \approx 1.833; \frac{25}{12} \approx 2.083; \frac{137}{60} \approx 2.283; \dots$.

Покажем, что последовательность $\left\{x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right\}$ не является фундаментальной и, следовательно, расходится по критерию Коши. Положим $= \frac{1}{4}$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}: \exists n = N + 1 > N, \exists m = 2N + 2 > N: |x_n - x_m| = \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N+2}$. Слагаемые последней суммы убывают и каждое из них не меньше последнего слагаемого $\frac{1}{2N+2}$, число слагаемых в сумме $(2N + 2) - (N + 1) = N + 1$. Тогда $|x_n - x_m| \geq (N + 1)\frac{1}{2N+2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} =$. ▷

5.8 Часто используемые числовые последовательности

В таблице 5.8.1 приведены числовые последовательности, которые часто используются для нахождения пределов.

Таблица 5.8.1

1)	$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$
2)	$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует
3)	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
4)	$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ если } \lvert q\rvert < 1; \\ \infty, \text{ если } \lvert q\rvert > 1; \\ 1, \text{ если } q = 1; \\ \text{не существует, если } q = -1. \end{cases}$
5)	$\forall q > 1, \forall k \in \mathbb{N}: \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$
6)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
7)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
8)	$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует, является иррациональным числом, обозначается $e \approx 2.71828182846$
9)	$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n} = 0$

	$n\to$!
10)	$\forall\alpha>1:\ \lim\limits_{\infty}\frac{\log_\alpha n}{}=0$

n_k

Пример 5.8.1. Доказать, что $q>1,\forall k\in\mathbb{N}$: n ∞ $\lim$ — $=0\to$ q^n .

Докажем сходимость последовательности n^k. Все члены по-

q $\left\{x_n=\frac{}{n}\right\}$

следовательности положительны, следовательно, эта последовательность ограничена снизу числом нуль. Покажем, что последовательность начиная с некоторого номера является невозрастающей и, следовательно, по следствию 5.1.1 и теореме 5.5.4 сходится. Запишем зависимость между двумя

$(n+1)^k$ $(n+1)^k n^k$

соседними членами последовательности $x_{n+1}=\frac{}{}$ $\frac{}{}$

q^n $=$ $n^k q q^n$ $=$

$+1$

$(n+1)^k$ $(n+1)^k$ $n+1$ 1^k

$\frac{}{}x$

$=\left(\frac{}{}\right)\cdot-$

k

$n^k q$ n. Коэффициент $n^k q$ n q положителен, поэтому последовательность невозрастающая, если $\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{q}\leq 1\right)\Leftrightarrow\left(n+1\leq n\sqrt[k]{q}\right)\Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{\sqrt[k]{q}-1}\leq n\right)$.

Обозначим $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. По следствию 5.1.1: a $=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=$

$(n+1)_k$ k 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right)\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q}a$, откуда $\left(a = \frac{1}{q}a\right) \Leftrightarrow \left(\left(1-\frac{1}{q}\right)a = 0\right) \Leftrightarrow (a = 0)$. ▷

Пример 5.8.2. Доказать, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

◁ Докажем равенство $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, показав, что $\forall\varepsilon > 0\colon\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\colon\ |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. $\forall\varepsilon > 0$ следствием примера 5.5.3 является равенство $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$, откуда следует, что $\exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\colon \left(\left|\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} - 0\right| < 1\right) \Rightarrow (n < (1+\varepsilon)^n) \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon\right)$. $\forall n \in N\colon$ $(1 \le n) \Leftrightarrow \left(1 \le \sqrt[n]{n}\right) \Rightarrow \left(1-\varepsilon < \sqrt[n]{n}\right)$. Таким образом, $\forall n > N\colon \left(1-\varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(-\varepsilon < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon\right)$. ▷

Пример 5.8.3. Доказать, что $\forall a > 0\colon\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

◁ Рассмотрим два случая $1 \le a$ и $0 < a < 1$.

Если $1 \le a$, то $1 \le \sqrt[n]{a}$ и для $a < n$: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$, то есть для $a < n$: $1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$. В примере 5.5.4 показано, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ и тогда из теоремы 5.4.2 следует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1 < \frac{1}{a}$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$. ▷

Пример 5.8.4. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1; \\ \infty, & \text{если } |q| > 1; \end{cases}$$

$n\to\infty$ 1, если $q = 1$;

не существует, если $q = -1$.

◁ 1) При $|q| < 1$: $\forall\varepsilon > 0$: $(|q^n - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|q|^n < \varepsilon) \Leftrightarrow \left(n > \frac{\lg(\varepsilon)}{\lg(|q|)}\right)$, где знак неравенства в последнем равносильном переходе изменился на противоположный, так как $(|q| < 1) \Rightarrow (\lg(|q|) < 0)$. 2) При $|q| > 1$: $\forall M > 0$: $(|q^n| \geq M) \Leftrightarrow (|q|^n \geq M) \Leftrightarrow \left(n \geq \frac{\lg(M)}{\lg(|q|)}\right)$, где знак неравенства в последнем равносильном переходе не изменился, так как $(|q| > 1) \Rightarrow (\lg(|q|) > 0)$.

3) При $q = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

4) При $q = -1$: $\{q^n\} = \{(-1)^n\}$. Расходимость последней последовательности доказана в задаче 5.1.7.▷

Пример 5.8.5. Найти пределы, используя теоремы о пределах и пределы, приведенные в таблице 5.8.1:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{2.5} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{2.5}}$ ... ;

∞ $\sqrt[n]{}$ 0.00005+1 1+1 $\sqrt[n]{5}-1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt[n]{5}-1} = \frac{3-1}{} =$ ... ;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{}{\sqrt{25}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$ ... $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{}{\sqrt{5}+1}$ ... 2 ;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10}$ ... ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\lg(n)}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}\cdot\frac{\lg(n)}{}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n)}{} = 1\cdot 0 = 0$$

5) $n\to\infty$ n^3+2

$n\to\infty$ n^3+2

n $n\to\infty$

n^3+2 $n\to\infty$

n ;

$$\lim \frac{7n+2\cdot\lg(n)}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(7+2\cdot\frac{\lg(n)}{n})}{n\cdot(2+\frac{3}{n})} = \lim \frac{7+2\cdot\frac{\lg(n)}{n}}{\frac{3}{n}} = \frac{7+2\cdot0}{} = \frac{7}{}$$

$$\frac{\log_2(2n^4-1)}{} \quad \frac{\log_2(n^4)\cdot(2-\frac{1}{n^4})}{} \quad \frac{4\cdot\log_2(n)+\log_2(2-\frac{1}{n^4})}{} =$$

6) ;

$n\to\infty$ $n\to\infty$ $2+$ $2+0$ 2

7) lim =

lim =

lim

$n\to\infty$ n $n\to\infty$ n $n\to\infty$ n

$$= 4\cdot \lim \frac{\log_2(n)}{} + \lim \log_2\left(2-\frac{1}{}\right)\cdot \lim\frac{1}{} = 0 + 1\cdot 0 = 0$$

n

$n4$ $n\to\infty$ n ;

$n\to\infty$ $n\to\infty$

n n n n

8) $\lim \frac{(-5)}{} = \lim \frac{(-1)}{}$

=0, как

$n\to\infty$ $(n+2)!$ $n\to\infty$ $(n+2)(n+1)(n!)$ $n\to\infty$ $n+2$ $n+2$ $n!$

произведение ограниченной последовательности на три бесконечно малые последовательности;

$$\frac{\frac{5n}{(n+1)!}}{(n+2)!\cdot(1+\frac{3^n}{(n+2)!})} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2}\cdot\frac{\frac{}{n!}\frac{}{n+1}}{(1+\frac{3^n}{}\cdot\frac{1}{}\cdot\frac{1}{})}\right) =$$

$(n+1)!+5n$ $(n+1)!\cdot(1+$ $)$ $(1+^{5n}\cdot{}^{1})$

9) lim (

$n+2)!+3n$ =

$n\lim\to\infty$

$n\to\infty$

$n!$ $n+1$ $n+2$

$$= 0\cdot\frac{1+0\cdot0}{1+0\cdot0\cdot0} = 0.$$

Задача 5.8.1. Найдите пределы, используя теоремы о пределах и пределы, приведенные в таблице 5.8.1:

1) $\lim \sqrt[5n]{0.2}$; 6) $\lim \frac{10n+5\cdot\lg(n)}{2n-1}$;

$n\to\infty$ n $n\to\infty$

$\lim$ 2) $\lim \frac{2+\sqrt{0.002}}{\sqrt[n]{\ }}$;

∞ n $11-2$ ∞

$\lim \frac{\sqrt{7}-1}{n}$ 7) $\log_5(7n^4+2)$;

$n\to n\to$ n

n

3); 8) $\lim \frac{(-7)}{(n+3)!}$;

$n\to\infty$ $\sqrt{49}-1$ $n\to\infty$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n^3}$; 9) $\lim_{n\to\infty}$ $((nn++21))!!++37^n{}_n$.

$n^3\cdot\lg(n)$

5) $\lim_{n\to\infty}$ ______ $2n^4-1$;

5.9 Эквивалентные последовательности

Определение 5.9.1. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Эквивалентность последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обозначается в виде $x_n \sim y_n$. **Следствие 5.9.1.** $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow (x_n \sim a)$.

Множители под знаком пределов можно заменять эквивалентными, что в ряде случаев позволяет упростить вычисление пределов.

Пример 5.9.1. Доказать, что последовательность многочленов $x_n = a_n n^k + a_{n-1}n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ $(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0;\ k \in \mathbb{N})$ эквивалентна последовательности $y_n = a_n n^k$.

$a_n n \ + a_{n-1} n \quad + \dots + a_1 n + a_0$ $\quad a_{n-1} \quad 1_k$

$k-1$

◄ Найдем предел: n ∞ ∞

$\lim$ ―――――――― $= \lim \left(1 + \text{――} \cdot - + \right.$

$\to$ $a_n n_k$ $n\to$ a_n n

-2 $\left. a_n \cdot \frac{1}{2} + \dots + \frac{a_0}{} \cdot \frac{1}{k}\right) =$ [теорема 4.4.3 о пределе суммы, теорема 4.4.1 о ли-

a_n n a_n n

нейной комбинации бесконечно малых последовательностей, теорема 4.4.2 о произведении бесконечно малых последовательностей] = 1. Следовательно, $(a_n n^k + a_{n-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0) \sim y_n = a_n n^k$. ⫐ **Задача 5.9.1.** Докажите, что $\sqrt{2n^2 + 33n + 1} \sim \sqrt{2}n$.

5.10 Раскрытие неопределенностей

Определение 5.10.1. Последовательность $\{z_n\}$, определенная как функция $f(\{x_n\}, \{y_n\})$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется *неопределенностью*, если в результате формальной подстановки пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, функция f теряет смысл. Вычисление предела неопределенности называется раскрытием неопределенности. В задачах раскрытия неопределенности широко используют переход к эквивалентным последовательностям, использование пределов, приведенных в таблице 5.8.1, преобразование формулы общего члена с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, умножения на сопряженные выражения.

Обычно рассматриваются неопределенности, приведенные в таблице 5.10.1.

Таблица 5.10.1. Неопределенности

№	Неопределенность	Название	Условное обозначение	Пример
1	$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$	Ноль делить на ноль	$\frac{0}{0}$	$x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n^2+1}$;
	$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при ∞	нечность де-Беско-	$\frac{\infty}{\infty}$	$x_n = n$;

$y_n =$

$\lim_{n\to\infty} x_n =$ лить на бес- $(n+1)^2$;

∞; $\lim_{n\to\infty} y_n =$ конечность

∞

3 ; $\{x_n \cdot y_n\}$ $0 \cdot \infty$

умножить на Ноль $x_n = \frac{1}{n}$;

при $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; бесконеч- $y_n =$

$(n+1)^2$;

$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$; ность

4 $\{x_n - y_n\}$ Бесконечность $\infty - \infty$ $x_n = n$;

при ми- $y_n =$

$\lim_{n\to\infty} x_n =$ нус бесконеч- $n+1$;

$+\infty$ $(-\infty)$; ность

$\lim_{n\to\infty} y_n =$

$+\infty$ $(-\infty)$

5 $\{(x_n)^{y_n}\}$ Еди- 1^∞ $x_n =$

при ница в сте $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$; пени $1 + \frac{1}{n}$; $\to\infty$

беско- ∞

6 $\{(x_n)^{y_n}\}$ Ноль в при $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и 0^0 $x_n = \frac{1}{n}$;

степени ноль

$y_n =$

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ $\frac{1}{n+1}$;

7 $\{(x_n)^{y_n}\}$ Беско при $\lim_{n\to\infty} x_n =$ ∞^0 $x_n = n$;

∞ и нечность в $y_n = \frac{1}{n}$;

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ степени ноль

$y_n = n$; $\lim y =$ нечность

n

$n\to\infty$

Все названия и обозначения, приведенные в третьем и четвертом столбцах таблицы 5.10.1, не имеют никакого прямого отношения к алгебраическим операциям, а являются *условными* обозначениями соответствующих последовательностей, приведенных в первом столбце таблицы 5.10.1.

Пример 5.10.1 показывает, что неопределенности одного и того же типа могут иметь разные пределы.

Пример 5.10.1. Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$:

1) $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\,[(n+1)\sim n] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$;

2) $x_n = -\frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n+1}{n}\,[(n+1)\sim n] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n}\right) = -1;$$

3) $x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2}\,[(n+1)\sim n] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$;

4) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $y_n = \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}\,[(n+1)\sim n] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n}$$ – не существует;

5) $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n}\,[(n+1)^2\sim n^2] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty;$$

6) $x_n = -\frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{(n+1)^2}{n}\right)[(n+1)^2\sim n^2] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{n}\right) = -\infty;$$

7) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n (n+1)^2}{n}\right) [(n+1)^2 \sim n^2] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \frac{n^2}{n}\right) = \infty.$$

Задача 5.10.1. Укажите тип неопределенности и раскройте неопределенности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+3)! + 5(n+2)!}{5(n+3)! - 3(n+2)!}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2-2n-3}\right)^n$.

РАЗДЕЛ 6 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1 Определение и свойства предела функции

Определение 6.1.1. Число $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $D \subseteq \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности точки a содержится хотя бы одна точка множества D.

Пример 6.1.1.

1) Предельными точками отрезка $D = [b;\, c]$ являются все точки этого отрезка.

2) Предельными точками интервала $D = (b;\, c)$ являются все точки отрезка $[b;\, c]$.

3) Предельными точками окрестности $D = V(a) = (b;\, c)$ точки $a \in \mathbb{R}$ являются все точки отрезка $[b;\, c]$.

4) Предельными точками проколотой окрестности $D = V^0(a) = (b;\, c) \backslash \{a\}$ точки $a \in \mathbb{R}$ являются все точки отрезка $[b;\, c]$.

5) Предельными точками полуинтервала $D = [b;\, c)$ являются все точки отрезка $[b;\, c]$.

6) Множество $D = \{5\}$ не имеет предельных точек.

7) Предельными точками множества $D = [b;\, c) \cup \{c + 1;\, b - 1\}$ являются все точки отрезка $[b;\, c]$.

8) Множество натуральных чисел $D = \mathbb{N}$ не имеет предельных точек.

9) Предельными точками множества рациональных чисел $D = \mathbb{Q}$ являются все точки множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 6.1.2. Определение предела функции по Коши. Если функция $f(x)$ определена на множестве D, имеющем предельную точку a, то число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a, если для любого числа > 0 существует число $\delta > 0$ такое, что для любого числа $x \in D$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| <$. Определение предела в логической символике имеет вид:

$$\forall \quad > 0 \colon \exists \delta > 0 \colon \forall x \in D \colon (\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \quad \}).$$

Если A есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a, то также говорят, что функция $f(x)$ стремится к A при x стремящемся к a и пишут $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$. Если хотят в явном виде указать множество D, по пишут $A = \lim\limits_{D \ni x \to a} f(x)$.

Следствие 6.1.1. Из определения 6.1.2 следует:

1) Существование и значение предела функции $f(x)$ в точке a *не зависит* от значения функции $f(x)$ в точке a, что следует из неравенства $0 < |x - a|$, входящего в определение предела 6.1.2. Существуют определения предела функции, в которых вместо неравенства $0 < |x - a|$ используют неравенство $0 \le |x - a|$. В этом случае существование и значение предела функции $f(x)$ в точке a *зависит* от значения функции $f(x)$ в точке a.

2) Существует окрестность точки a такая, что значения функции $f(x)$ в точках x вне этой окрестности не влияют на существование и значение предела функции, что что следует из неравенства $|x - a| < \delta$, входящего в определение предела 6.1.2.

Определение предела 6.1.2 в строгой математической форме отражает тот факт, что при приближении числа $x \in E$ к числу a значение функции $f(x)$ приближается к числу A (возможно – не монотонно).

Пример 6.1.2. Используя определение предела функции по Коши доказать, что $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2$.

⊲ Функция $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ имеет область определения $D = (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$, включающую предельную точку $a = 3$. Доказательство заключается в том, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ указать $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in D$ из $(0 < |x - 3| < \delta)$ следует $\left(\left|\frac{x^2-9}{x^2-3x} - 2\right| < \varepsilon\right)$. Так как $3 \notin D$, то $\forall x \in D$ имеют место равенства $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x} = \frac{x+3}{x}$ и неравенство $\left|\frac{x^2-9}{x^2-3x} - 2\right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\left(\frac{|x-3|}{2} < \varepsilon\right) \Leftrightarrow (|x - 3| < 2\varepsilon)$. Если положить $\delta = 2 > 0$, то из неравенства $0 < |x - 3| < \delta$ будет следовать неравенство $|x - 3| < 2$ и равносильное ему на множестве D неравенство $\left|\frac{x^2-9}{x^2-3x} - 2\right| <$. ⊳

Пример 6.1.3. Используя определение предела функции по Коши доказать, что для $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

◁ Точка $a = 0$ является предельной точкой множества D. Доказательство заключается в том, чтобы $\forall\varepsilon > 0$ указать $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in D$ из $(0 < |x - 0| < \delta) \Leftrightarrow (0 < |x| < \delta)$ следует $\left(\left|x \cdot sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\left|x \cdot sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon\right)$. Так как $\forall x \neq 0$: $\left|sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, то $\left|x sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ и неравенство $\left|x \cdot sin\frac{1}{x}\right| <$ будет выполняться если выполняется неравенство $0 < |x| <$. Таким образом, в рассматриваемом примере можно положить $\delta =$. ▷

Примеры 6.1.2 и 6.1.3 иллюстрируют то, что функция $f(x)$ может иметь предел в точке a, в случае, когда $f(x)$ в точке a не определена.

Определение 6.1.3. Определение предела функции по Гейне. Если функция $f(x)$ определена на множестве D, имеющем предельную точку a, то число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой числовой последовательности $\{x_n\} \subseteq D\backslash\{a\}$, сходящейся к a, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Следствие 6.1.2. Из определения 6.1.3 следует: 1) если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то этот предел единственный, что следует из единственности предела последовательности. 2) Для доказательства того, что предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует достаточно показать, что имеет место хотя бы одно из утверждений:

a) точка a не является предельной точкой области определения D функции $f(x)$;

b) существует последовательность $\{x_n\} \subseteq D\backslash\{a\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и предел $\lim f(x_n)$ не существует;

$n\to\infty$

c) существуют две последовательность $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\} \subseteq D\backslash\{a\}$ такие, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a$ и пределы $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ и $\lim_{n\to\infty} f(\hat{x}_n)$ существуют и не равны.

Теорема 6.1.1. Определения 6.1.2 и 6.1.3 равносильны, то есть $\exists A = \lim_{x\to a} f(x)$ в смысле определения по Коши тогда и только тогда, когда $\exists A = \lim_{x\to a} f(x)$ в смысле определения по Гейне.

Теорему 6.1.1 примем без доказательства.

Пример 6.1.4. Доказать, что для $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ не существует предела функции $f(x) = sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

◁ Для доказательства покажем, что выполняются условия следствия 6.1.2.2с: существуют две последовательности $\{x_n\} \subseteq D\backslash\{0\} = D$ и $\{\tilde{x}_n\} \subseteq D\backslash\{0\} = D$, сходящиеся к $a = 0$, и такие, что последовательности $\left\{f(x_n) = sin\frac{1}{x_n}\right\}$ и $\left\{f(\tilde{x}_n) = sin\frac{1}{\tilde{x}_n}\right\}$ сходятся к разным значениям. Положим

$\left\{x_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}\right\} \to 0$ и $\left\{\tilde{x}_n = -\frac{1}{\pi/2+2\pi n}\right\} \to 0$. Тогда $\{f(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1\} \to 1$, $\{f(\tilde{x}_n) = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = -1\} \to -1$. ▷ **Задача 6.1.1.** Найдите предельные точки множеств:

1) полуинтервала $D = (b; c]$;
2) множества $D = \{-2; 9\}$;
3) множества $D = \{c + 2; b - 3\} \cup [d; c)$;
4) множества целых чисел $D = \mathbb{Z}$;
5) множества иррациональных чисел $D = \mathbb{J}$;
6) множества положительных чисел $D = P_+$; 7) множества вещественных чисел $D = \mathbb{R}$.

Задача 6.1.2. Используя определение предела функции по Коши докажите, что $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-4x-5} = \frac{5}{3}$.

Задача 6.1.3. Докажите, что для $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ не существует предела функции $f(x) = cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

6.2 Бесконечно малые функции

Определение 6.2.1. Функция $f(x)$, определенная на множестве D, имеющем предельную точку a, называется бесконечно малой при x стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Пример 6.2.1. Функция $f(x) = x \cdot sin\frac{1}{x}$, рассмотренная в примере 6.1.3, является бесконечно малой при $x \to 0$.

Теорема 6.2.1. Свойства бесконечно малых функций:

1) Если функции $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$, то существует проколотая окрестность $V^0(a)$ точки a, такая что $f(x)$ ограничена на множестве $V^0(a) \cap D$.

2) Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$: 1) определенны на множестве D, включающем предельную точку a; 2) $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \dots = \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = 0$. То есть, сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

3) Если $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$ и $\varphi(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности $V^0(a)$ точки a, то произведение функций $\varphi(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. В частности: 1) произведение $\varphi(x) \cdot f(x)$ двух бесконечно малых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$; 2) произведение $c \cdot f(x)$ бесконечно малой функции $f(x)$ при $x \to a$ на константу c есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

◁ 1) Требуется доказать, что $\exists V^0(a)$ и $\exists M \in \mathbb{R}$ $(M > 0)$, такие, что $\forall x \in V^0(a) \cap D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Возьмем произвольное $M \in \mathbb{R}$ $(M > 0)$. По определению предела при $= M$ из равенства $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что для любого числа $x \in D$ такого, что $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 0| < M$. То есть, существует $V^0(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ такая, что $\forall x \in V^0(a) \cap D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

2) Из равенств $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = \dots = \lim_{x\to a} f_n(x) = 0$ следует, что $\forall \left(\frac{\varepsilon}{n}\right) > 0$ существуют числа $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$ такие, что для любого числа $x \in D$ имеют место утверждения: $(0 < |x-a| < \delta_1) \Rightarrow \left(|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right)$; $(0 < |x-a| < \delta_2) \Rightarrow \left(|f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right)$; …; $(0 < |x-a| < \delta_n) \Rightarrow \left(|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right)$. Для $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2; \dots; \delta_n\}$ имеет место утверждение: $(0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow \left(|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right) \wedge \left(|f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right) \wedge \dots \left(|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{n}\right)$. Тогда при $0 < |x-a| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x)| = |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$, которое означает что $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

3) Ограниченность функции $\varphi(x)$ означает, что существует число $M > 0$ такое, что $\forall x \in V^0(a) = (\alpha;\ \beta)\setminus\{a\}$: $|\varphi(x)| \le M$. Равенство $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ означает $\forall \left(\frac{\varepsilon}{M}\right) > 0$ существует число $\mu > 0$ такое, что для любого числа $x \in D$ имеют место утверждения: $(0 < |x-a| < \mu) \Rightarrow \left(|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\right)$. Если положить $\delta = \min\{\mu; a-\alpha; \beta - a\}$, для любого $x \in D$ имеет место

утверждение: $(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow(|\varphi(x)|\le M)\wedge\left(|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\right)$. Тогда при $0<|x-a|<\delta$ справедливо неравенство $|\varphi(x)\cdot f(x)|=|\varphi(x)|\cdot|f(x)|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$, которое означает что $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\cdot f(x))=0$. ▷

6.3 Теоремы о пределах функций

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены на множестве D, имеющем предельную точку a. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 6.3.1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, где функция $\alpha(x)$ определена на множестве D и есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

◁ 1) $\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0\right):=\left(\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in D:(\,0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon\})\right)$. Если $f(x)=A+\alpha(x)$, то $(|\alpha(x)|<\varepsilon)\Leftrightarrow(|f(x)-A|<\varepsilon)$, что означает $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. 2) $\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\right):=\left(\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in D:(\,0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\})\right)$. Если обозначить $f(x)-A=\alpha(x)$, то $(|f(x)-A|<\varepsilon)\Leftrightarrow(|\alpha(x)|<\varepsilon)$, что означает $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. ▷

Теорема 6.3.2. (Теорема о пределе “зажатой функции”). Если $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$ и существует проколотая окрестность $V^0(a)$ точки a такая что на множестве $V^0(a)\cap D$ выполняются неравенства $g(x)\le f(x)\le h(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

◁ $\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\right):=\left(\forall\varepsilon>0:\exists\mu>0:\forall x\in D:(\,0<|x-a|<\mu\Rightarrow\right.$

$|g(x) - A| < \varepsilon\})$. $\left(\lim\limits_{x\to a} h(x) = A\right) :=$ $(\forall\varepsilon > 0 : \exists\vartheta > 0 : \forall x \in D : (0$ $a| < \vartheta \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon\})$. Пусть $V^0(a) = (\alpha;\ \beta)\backslash\{a\}$. Если положить $\delta = \min\{\mu; \vartheta; a - \alpha; \beta - a\}$, для любого $x \in D$ имеет место утверждение: $(0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|g(x) - A| < \varepsilon) \wedge (|h(x) - A| < \varepsilon) \wedge (g(x) \le f(x) \le h(x))$. Так как, $g(x) \le f(x)$, то из неравенства $(|g(x) - A| < \varepsilon) \Rightarrow (-\varepsilon < g(x) - A) \Leftrightarrow (A - \varepsilon < g(x))$ следует неравенство $(A - \varepsilon < f(x)) \Leftrightarrow (-\varepsilon < f(x) - A)$. Так как, $f(x) \le h(x)$, то из неравенства $(|h(x) - A| < \varepsilon) \Rightarrow (h(x) - A < \varepsilon) \Leftrightarrow (h(x) < A + \varepsilon)$ следует неравенство $(f(x) < A + \varepsilon) \Leftrightarrow (f(x) - A < \varepsilon)$. Так как, $((-\varepsilon < f(x) - A) \wedge (f(x) - A < \varepsilon)) \Leftrightarrow |f(x) - A| <$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ⊳

Теорема 6.3.3. (Теорема о пределе суммы функций). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

⊲ По теореме 6.3.1 функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть представлены в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$ где функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены на множестве D и есть бесконечно малые функции при $x \to a$. Тогда $f(x) \pm g(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = (A \pm B) + (\alpha(x) + (\pm 1)\beta(x))$. В силу теоремы 6.2.1.3 функция $(\pm 1)\beta(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$ и тогда: 1) в силу теоремы 6.2.1.2 функция $\alpha(x) + (\pm 1)\beta(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$; 2) в силу теоремы 6.3.1 $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$. ⊳

Теорема 6.3.4. (Теорема о пределе произведения функций). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

⊲ По теореме 6.3.1 функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть представлены в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$ где функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены на множестве D и есть бесконечно малые функции при $x \to a$. Тогда $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = (A \cdot B) + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x))$. В силу теоремы 6.2.1.3 функции $A \cdot \beta(x), B \cdot \alpha(x), \alpha(x) \cdot \beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \to a$ и тогда: 1) в силу теоремы

6.2.1.2 функция $A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$; 2) в силу теоремы 6.3.1 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$. ▷

Теорема 6.3.5. (Теорема о пределе частного функций). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $B\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

◁ По теореме 6.3.1 функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть представлены в виде $f(x) = A+\alpha(x)$, $g(x) = B+\beta(x)$ где функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены на множестве D и есть бесконечно малые функции при $x\to a$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{1}{B(B+\beta(x))}(B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x))$. Покажем, что существует $\overset{0}{V}(a)$, в которой функция $\frac{1}{B(B+\beta(x))}$ ограничена числом $\frac{2}{B^2}$. Справедливы утверждения: $\left(\left|\frac{1}{B(B+\beta(x))}\right| \le \frac{2}{B^2}\right) \Leftrightarrow (B^2 \le 2|B^2 + B\cdot\beta(x)|) \Leftarrow (B^2 \le 2|B^2| - 2|B\cdot\beta(x)|) \Leftrightarrow (2|B|\cdot|\beta(x)| \le B^2) \Leftrightarrow |\beta(x)| \le \frac{|B|}{2}$.

Так как, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, то существует проколотая окрестность $\overset{0}{V}(a)$, в которой $\left(|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}\right)$ и в этой окрестности функция $\frac{1}{B(B+\beta(x))}$ ограничена.

В силу теорем 6.2.1.3 и 6.2.1.2 функция $B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$ и тогда: 1) в силу теоремы 6.2.1.3 функция $\frac{1}{B(B+\beta(x))}(B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x))$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$; 2) в силу теоремы 6.3.1 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. ▷

Теорема 6.3.6. (Теорема о пределе сложной функции). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, A есть предельная точка области определения функции $g(x)$,

$x{\to}a$

существует проколотая окрестность $V^0(a)$ точки a такая что на множестве $V^0(a) \cap D$: $f(x) \neq A$, существует предел $\lim g(y)$, то сложная функция

$y{\to}A$

$g\big(f(x)\big)$ имеет предел в точке a, причем справедливо равенство $\lim g\big(f(x)\big) = \lim g(y)$.

$x{\to}a$ $y{\to}A$

Теорему 6.3.6 примем без доказательства.

Пример 6.3.1. Найти $\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$.

◁ По теоремам 6.3.3 и 6.3.4 находим пределы числителя и знаменателя:

x

-1

$\lim (x^2 + x - 2) = \left(\lim\limits_{x\to} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to-1} x\right) + \left(\lim\limits_{x\to} x\right) - \lim\limits_{x\to} 2 =$

$\lim\limits_{\to} (2x^2 - 8) = \left(\lim\limits_{x\to} 2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to} x\right) - \lim\limits_{x\to-1} 8 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) -$

-1 -1 -1

$8 = -6;$

$x \to -1$ -1 -1 -1

$(-1) \cdot (-1) - 1 - 2 = -2$. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю, то по теореме 6.3.5 находим:

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^2-8}{x^2+x-2} = \frac{-6}{-2} = 3.$ ▷

Пример 6.3.2. Найти $\lim\limits_{x\to-2} \frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$.

◁ По теоремам 6.3.3 и 6.3.4 находим пределы числителя и знаменателя:

x

$8 = 0;$ $\lim\limits_{x\to-2}(x^2 + x - 2) = \left(\lim\limits_{x\to} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to} x\right) + \left(\lim\limits_{x\to} x\right) - \lim\limits_{x\to} 2 = (-2) \cdot{-2-2-2-2}$

$\lim\limits_{\to-2}(2x^2 - 8) = \left(\lim\limits_{x\to} 2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to} x\right) - \lim\limits_{x\to} 8 = 2 \cdot (-2) \cdot (-2) -_{-2}$

-2 -2 -1

$(-2)-2-2=0$. Так как пределы числителя и знаменателя равны нулю (имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$), то теорема 6.3.5 непосредственно не применима. Преобразуем дробь $\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$ так, что бы можно было применить теорему 6.3.5. Разложим на множители числитель и знаменатель $\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2(x-2)}{(x-1)}$. Так как при вычислении предела $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$ не рассматривается значение $x=-2$, то дробь $\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$ можно сократить на $(x+2)$ и тогда $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-2)}{(x-1)}$. По теоремам 6.3.3 и 6.3.4 находим пределы числителя и знаменателя: $\lim_{x\to-2}2(x-2)=(\lim_{x\to-2}2)\cdot(\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}2)=2\cdot(-2-2)=-8$; $\lim_{x\to-2}(x-1)=\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}1=-2-1=-3$. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю, то по теореме 6.3.5 находим: $\lim_{x\to-2}\frac{2(x-2)}{(x-1)}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$. ▷

Задача 6.3.1. Найдите пределы:

1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$;

2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$;

3) $\lim_{x\to1}$ ${}^2x-2-x-46$;

4) $\lim_{x\to-5}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7} x2x+25-x9+6$.

Задача 6.3.2. Найдите пределы:

6) $x\lim \to -1\ xx22+-32xx+-23$;

7) $x\lim \to 1\ xx22-+32xx+-23$;

8) $\lim\limits_{x\to -2} x2x-2-x-46$;

9) $x\lim \to 2\ x2x+2-x-46$;

x^2+5x+6

$x\lim \to -3\quad x2-9$.

6.4 Различные типы пределов

В таблице 6.4.1 приведены определения пределов, отличных от пределов, заданных определениями 6.1.2, 6.1.3.

Таблица 6.4.1.

№	Обозначение предела	Свойства области определения функции	
		Определение предела по Коши	Определение предела по Гейне
1.	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall M > 0: \exists x \in D: x > M$	
		$\forall \quad > 0: \exists M > 0: \forall x \in D:$ $(x > M) \Rightarrow$ $\lvert f(x) - A\rvert <$	$\forall\{x_n\} \subseteq D:$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$
2.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall M < 0: \exists x \in D: x < M$	
		$\forall \quad > 0: \exists M < 0: \forall x \in D:$ $(x < M) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ $\lvert f(x) - A\rvert <$	$\forall\{x_n\} \subseteq D:$ $\Rightarrow$ $n\to\infty$
3.	$\lim f(x) = A$	$\forall M > 0: \exists x \in D: \lvert x\rvert > M$	

	$x\to\infty$	$\forall \quad > 0: \exists M > 0: \forall x \in D$: $(\lvert x\rvert > M) \Rightarrow$ $\lvert f(x) - A\rvert <$	$\forall\{x_n\} \subseteq D$: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$
4.	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$	D имеет предельную точку a	
		$\forall M > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D$: $0 < \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow$ $f(x) > M$	$\forall\{x_n\} \subseteq D$: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$
5.	$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	D имеет предельную точку a	
		$\forall M < 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D$: $0 < \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow$ $f(x) < M$	$\forall\{x_n\} \subseteq D$: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$
6.	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	D имеет предельную точку a	
		$\forall M > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D$: $0 < \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow$ $\lvert f(x)\rvert > M$	$\forall\{x_n\} \subseteq D$: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$
7.	Предел слева $f(a-0) \coloneqq \lim_{x\to a-0} f(x) = A$	$\forall \quad > 0: \exists x \in D: x \in (a - \quad; a)$	
		$\forall \quad > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D$: $a - \quad < x < a \Rightarrow \lim x_n = a$ $\lvert f(x) - A\rvert <$ $_n\lim_{\to\infty}$	$\Rightarrow$ $n\to\infty$
8.	Предел справа $f(a+0) \coloneqq \lim_{x\to a+0} f(x) = A$	$\forall \quad > 0: \exists x \in D: x \in (a; a + \quad)$	
		$\forall \quad > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D$: $a < x < a + \quad \Rightarrow$	$\forall\{x_n\} \subseteq D: x_n > a$: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$
		$\lvert f(x) - A\rvert <$	$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Определение 6.4.1. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x стремящемся к a, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Определение 6.4.2. Предел слева $f(a-0)$ и предел справа $f(a+0)$ называются конечными *односторонними пределами* или просто односторонними пределами. В случае $a = 0$ для односторонних пределов используются обозначения $\lim_{x\to 0+} f(x)$ и $\lim_{x\to 0-} f(x)$.

Теорема 6.4.1. Предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой предел слева $f(a-0)$ и предел справа $f(a+0)$. При этом $\lim_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$.

Теорему 6.4.1 примем без доказательства.

Пример 6.4.1. Следующие пределы определяются по аналогии с пределами, приведенными в таблице 6.4.1:

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
2. $\lim f(x) = +\infty$; $x\to-\infty$
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;
4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
5. $\lim f(x) = -\infty$; $x\to-\infty$
6. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;
7. $\lim f(x) = \infty$; $x\to+\infty$
8. $\lim f(x) = \infty$; $x\to-\infty$
9. $\lim f(x) = \infty$; $x\to\infty$
10. $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$;
11. $\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty$;
12. $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$;
13. $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$;
14. $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$;
15. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$. Дать определение предела 6.4.1.1: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

◁ Свойства области определения функции: $\forall M>0: \exists x\in D: x>M$, в частности, $D=[b;+\infty)$, $D=(b;+\infty)$, $D=(-\infty,+\infty)$. Определение предела по Коши: $\forall V>0: \exists M>0: \forall x\in D: (x>M)\Rightarrow f(x)>V$. Определение предела по Гейне: $\forall\{x_n\}\subseteq D$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$. ▷

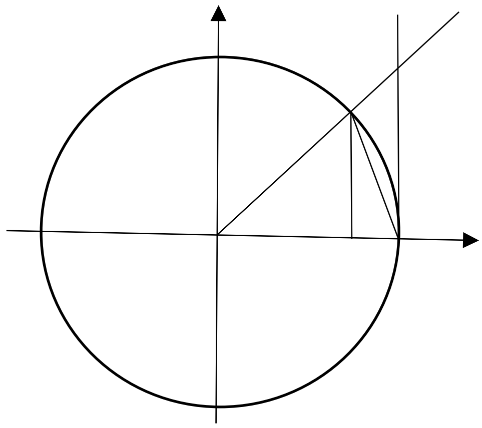
Задача 6.4.1. Дайте определение пределов 2-15 примера 6.4.1.

6.5 Замечательные пределы

Определение 6.5.1. Пределы $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ называются соответственно первым и вторым замечательным пределами. Значения этих пределов устанавливают теоремы 6.5.1 и 6.5.2.

Теорема 6.5.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$

◁ Покажем, что $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\frac{\sin(x)}{x}=1$. Тогда из теоремы 6.4.1 следует справедливость теоремы 6.5.1. Рассмотрим тригонометрический круг, изображенный на рис. 6.5.1. Пусть $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ есть длина дуги AB.



Рис

Имеют место неравенства $S_{\Delta OAB}<S_{sectOAB}<S_{\Delta OAD}$. Так как $|OA|=1$, $|BC|=\sin x$, $|DA|=\mathrm{tg}x$, то $(S_{\Delta OAB}<S_{sectOAB}<S_{\Delta OAD})\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}|OA||BC|<\frac{1}{2}|OA|x<\frac{1}{2}|OA||AD|\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\mathrm{tg}x\right)\Leftrightarrow(\sin x<x<\mathrm{tg}x)$. Из $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ следует $(x>0)\wedge(\sin x>0)\wedge(\mathrm{tg}x>0)$ и тогда $(\sin x<x<\mathrm{tg}x)\Leftrightarrow\left(1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\right)\Leftrightarrow\left(\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\right)\Rightarrow(\cos$

$x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{x}{\cos x}$ … $\frac{\sin x}{x} \le 1\Big)$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$, и тогда из теоремы 6.3.2 следует, что $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Так как $\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ и $0 < \sin x < x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то справедливы неравенства $1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \le \cos x \le 1$. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{0^2}{2} = 1$ и тогда по теореме 6.3.2 следует справедливость равенства $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$.

Находим предел слева $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = [(x = -u) \Rightarrow ((x \to 0-) \Rightarrow (u \to 0+))] = \lim\limits_{u\to 0+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim\limits_{u\to 0+} \frac{-\sin(u)}{-u} = \lim\limits_{u\to 0+} \frac{\sin(u)}{u} = 1$. ◊

Следствие 6.5.1. Следствиями теоремы 6.5.1 являются равенства:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Пример 6.5.1. Доказать следствие 6.5.1.1: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = 1$.

◊ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$. ◊

$x\to 0x$

Теорема 6.5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

⦉ Докажем теорему 6.5.2, используя результат примера 5.2.6, в котором показано, что теорема 6.5.2 выполняется для натуральных значений x. Рассмотрим два случая: 1) $x\to+\infty$ и 2) $x\to-\infty$. В первом случае значение

предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ не изменится, если рассматривать $x\geq 1$. Для любого

$x\geq 1$ существует $n\in\mathbb{N}$, такое что $n\leq x< n+1$. Тогда $\left(\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}<\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\leq 1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}\right)$. Из $1+\frac{1}{n+1}\leq 1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}$ и $n\leq x<$

неравенств

$n+1\ x\ n\ n\ x\ n+1$

$n+1$ следуют неравенства $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Если $x\to$

$+\infty$, то из неравенства $x<n+1$ следует, что $n+1\to\infty$. Утверждение $n+$

$1\to\infty$ равносильно утверждению $n\to\infty$. Таким образом $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Находим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1+0}=e;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=e(1+0)=$$

e. По тео-

x

$x\to$ x

x

$(x \to$ $(u \to$

$x\to -\infty$ x $u\to+\infty$

$\frac{1}{-u}^{-u}$ $= \lim_{+\infty} (\frac{u-1}{})^{-u} = \lim_{u\to+\infty} (\frac{u}{u-1})^{u} = \lim_{+\infty} (\frac{u-1+1}{u-1})^{u} = \lim_{u\to+\infty} (1 +$

$\frac{1}{u-1}$ $= \lim_{u\to+\infty} [(1 + \frac{1}{u-1})^{u-1} (1 + \frac{1}{u-1})] = \lim_{u\to+\infty} (1 + \frac{1}{u-1})^{u-1} \lim_{\to+\infty} (1 +$

$\frac{1}{u-1}) = e(1 + 0) = e$. Из случаев 1) и 2) следует, что $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x} = e$. ▷

$+\infty$ 1

реме 6.3.2 заключаем, что $\lim \left(1 + -\right)$. Во втором случае

находим: 1 $\lim \left(1 + -\right) = [(x = -u) \Rightarrow (^{-\infty)} \Leftrightarrow +\infty))] = \lim \left(1 +\right.$

$)$

$u\to$ u $u\to$

u

$)$

u

Следствие 6.5.2. Следствиями теоремы 6.5.2 являются равенства:

1) $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

2) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$ $(a \in \mathbb{R})$;

3) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

4) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

5) $\lim_{x\to0} \frac{a^{x}-1}{x\cdot\ln a} = 1$ $(a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1)$;

6) $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^{a}-1}{ax} = 1$ $(a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$.

Пример 6.5.2. Доказать следствие 6.5.2.1: $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

◁ $\lim(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left[(x = \frac{1}{u}) \Rightarrow ((x \to 0)\right.$ 1 u

$\Leftrightarrow (u \to \infty))\Big] = \lim \left(1 + -\right) =$

$x \to 0 u$ $\qquad u \to \infty \qquad u$

e. ▷

Задача 6.5.1. Докажите следствие 6.5.1.2: $\lim \frac{\arcsin(x)}{} = 1$.
$x \to 0 x$ **Задача 6.5.2.** Докажите следствие 6.5.1.
3: $\lim \frac{\operatorname{arctg}(x)}{} = 1$. $x \to 0 x$ **Задача 6.5.3.** Докажите следствие
6.5.1.4: $\lim \frac{1-\cos(x)}{2} = 1$ $_x$.

$x \to 0$ $\left(\frac{}{2}\right)_a$ x

Задача 6.5.4. Докажите следствие 6.5.2.2: $\lim \left(1 + \frac{}{}\right) = e^a$ $(a \in \mathbb{R})$.

$x \to \infty$ $\qquad x$

Задача 6.5.5. Докажите следствие 6.5.2.2: $\lim \frac{\ln(1+x)}{} = 1$.

$x \to 0$ $\qquad x$

x

Задача 6.5.6. Докажите следствие 6.5.2.2: $\lim \frac{e \ -1}{} = 1$.

$\lim_{0} \frac{-1}{x \cdot \ln a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}; a >$

$x \to 0$ x **Задача**

6.5.7. Докажите следствие 6.5.2.2: ^{ax}

$x \to$

$0; a \neq 1)$.

a

$(1+x) \ -1$

Задача 6.5.8. Докажите следствие 6.5.2.2: $\lim \frac{}{} = 1$ $(a \in$

$x \to 0 ax$

$\mathbb{R}; a \neq 0)$.

6.6 O – символика и сравнение функций

Определение 6.6.1. *Запись* $f(x) = O(g(x))$ при $x \in X$ означает, что $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, такое что $\forall x \in X$: $|f(x)| \leq \alpha |g(x)|$.

Определение 6.6.2. *Запись* $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ означает, что $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ и существует проколотая окрестность $V^0(a)$, такие что $\forall x \in V^0(a)$: $|f(x)| \leq \alpha |g(x)|$.

Определение 6.6.3. *Запись* $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to a$ означает, что существует проколотая окрестность $V^0(a)$, такая что $\forall x \in V^0(a)$: $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$.

Определение 6.6.4. *Запись* $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ означает, что существует проколотая окрестность $V^0(a)$ в которой функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to a}\alpha(x) = 0$. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ и $g(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$. **Определение 6.6.5.** Если $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^p} = A$, $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $p > 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно бесконечно малой x. **Определение 6.6.6.** Если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^p} = A$, $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $p > 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой порядка* p относительно бесконечно большой x.

Определение 6.6.7. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to a$. Эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначают в виде $f(x) \sim g(x)$.

Теорема 6.6.1. Если $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

Теорема 6.6.2. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ и $g(x) \neq 0$ в проколотой окрестности $V^0(a)$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Пример 6.6.1. Доказать, что если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$, то $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

◁ По определению 6.6.4 запись $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает, что существует проколотая окрестность $V^0(a)$ в которой функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = \alpha(x) \cdot 1 = \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to a}\alpha(x) = 0$. Так как $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$ и $f(x) = \alpha(x)$ в проколотой окрестности $V^0(a)$, то $f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. ▷

Пример 6.6.2. Доказать, что если $f(x) = O(1)$ при $x \to a$, то существует проколотая окрестность $V^0(a)$, в которой функция $f(x)$ ограничена.

◁ По определению 6.6.2 запись $f(x) = O(1)$ при $x \to a$ означает, что $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ и существует проколотая окрестность $V^0(a)$, такие что $\forall x \in V^0(a)$:

$|f(x)| \leq \alpha|1| = \alpha$. То есть в проколотой окрестности $V^0(a)$ функция $f(x)$ ограничена числом α.◊

Теорема 6.6.3. Замена функций эквивалентными функциями при вычислении пределов. Пусть: 1) $f(x) \sim \varphi(x)$ и $g(x) \sim \psi(x)$ при $x \to a$; 2) $g(x)$ и $\psi(x)$ не обращаются в нуль в некоторой проколотой окрестности $V^0(a)$; 3) существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

В таблице 6.6.1 приведены эквивалентности функций, часто используемых при применении теоремы 6.6.3.

Таблица 6.6.1

№	Эквивалентность при $x \to 0$
1.	$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad (a > 0)$
2.	$\ln(1 + x) \sim x$
3.	$\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$
4.	$\sin x \sim x$
5.	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
6.	$\mathrm{tg}\, x \sim x$
7.	$\mathrm{sh}\, x \sim x$
8.	$\arcsin x \sim x$
9.	$\mathrm{arctg}\, x \sim x$

РАЗДЕЛ 7 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1 Непрерывность функции в точке

Определение 7.1.1. Функция f называется *непрерывной* в точке $a \in \mathbb{R}$, если:

1) f определена в некоторой окрестности $V(a)$ точки a;

$$\begin{cases} 2)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a). \end{cases}$$

Замечание 7.1.1. Условие $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ означает, что, во-первых, предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ должен существовать и, во-вторых, этот предел должен равняться значению функции f в точке a.

Определение 7.1.2. Функция f называется *непрерывной слева* в точке $a \in \mathbb{R}$, если:

$$\begin{cases} 1)\ f \text{ определена на некотором промежутке } (a-\sigma; a]\ (\sigma \in P_+); \\ 2)\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a). \end{cases}$$

Определение 7.1.3. Функция f называется *непрерывной справа* в точке $a \in \mathbb{R}$, если:

$$\begin{cases} 1)\ f \text{ определена на некотором промежутке } [a; a+\sigma)\ (\sigma \in P_+); \\ 2)\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a). \end{cases}$$

Задача 7.1.1. Для определения 7.1.2 сформулируйте замечание, аналогичное замечанию 7.1.1.

Задача 7.1.2. Для определения 7.1.3 сформулируйте замечание, аналогичное замечанию 7.1.1.

Пример 7.1.1. Записать определение 7.1.1 в логической символике.

◁ Функция f *непрерывна* в точке $a \in \mathbb{R} :=$

$$\begin{cases} 1) \exists V(a): V(a) \subseteq D(f); \\ 2)\ \forall \varepsilon \in P_+: \exists \delta(\varepsilon) \in P_+: \\ \quad \forall x: \Big(\big(x \in D(f)\big) \wedge (|x-a|) < \delta(\varepsilon)\Big) \Rightarrow \Big(\big(f(x) - f(a)\big) < \varepsilon\Big) \end{cases}. \ ▷$$

Задача 7.1.3. Запишите определение 7.1.2 в логической символике.

Задача 7.1.4. Запишите определение 7.1.3 в логической символике.

Пример 7.1.2. Сформулировать условие того, что функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a$\in \mathbb{R}$ и записать это условие в логической символике.

◁ Из определения 7.1.1 и замечания 7.1.1 следует что функция fне является непрерывной в точке a$\in \mathbb{R}$, если выполняется хотя бы одно из трех условий 1) не существует окрестности $V(a)$точки a, в которой функция f определена; 2) предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует; 3) предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. В логической символике:

Функция f не является непрерывной в точке $a \in \mathbb{R} :=$

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ \forall V(a): V(a) \nsubseteq D(f); \\ 2)\ \big(\exists V(a): V(a) \subseteq D(f)\big) \wedge (\exists \varepsilon \in P_+: \forall \delta \in P_+): \\ \quad \exists x: \Big(\big(x \in D(f)\big) \wedge (|x-a|) < \delta\Big) \wedge \Big(\big(f(x) - f(a)\big) \geq \varepsilon\Big) \end{array}\right.$$

.

Задача 7.1.5. Сформулировать условие того, что функция f не является непрерывной слева в точке $a \in \mathbb{R}$ и записать это условие в логической символике.

Задача 7.1.6. Сформулировать условие того, что функция f не является непрерывной справа в точке $a \in \mathbb{R}$ и записать это условие в логической символике.

7.2 Точки разрыва функции

Определение 7.2.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва* функции f, если

f определена в некоторой окрестности $V(a)$ или проколотой окрестности $V^0(a)$ точки a;

$$\left\{\left[\begin{array}{l} f \text{ не определена в точке } a; \\ (f \text{ определена в точке } a) \wedge (\text{не существует } \lim\limits_{x\to a} f(x)); \\ (f \text{ определена в точке } a) \wedge (\text{существует } \lim\limits_{x\to a} f(x)) \wedge \Big(\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)\Big) \end{array}\right.\right.$$

.

Если a есть точка разрыва функции f, то функцию f называют *разрывной* в точке a.

Определение 7.2.2. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой устранимого разрыва* функции f, если

f определена в некоторой окрестности $V(a)$ или проколотой окрестности $V^0(a)$точки a;

Существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

f не определена в точке a; [

{ (f определена в точке a)$\wedge \left(\lim f(x) \neq f(a) \right)_{x\to a}$.

Определение 7.2.3. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва первого рода* функции f, если

f определена в некоторой окрестности $V(a)$ или

проколотой окрестности $^0(a)$ Vточки a;

Существует $f(a-0) = \lim f(x)_{x\to a}$;

-0

Существует $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

$f(a-0) \neq f(a+0)$.

Если $a \in \mathbb{R}$ есть точка разрыва первого рода функции f, то разность $\Delta f(a) = f(a+0) - f(a-0)$ называют *скачком функции* f в точке a.

Определение 7.2.4. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва второго рода* функции f, если

f определена в некоторой окрестности $V(a)$ или проколотой окрестности $V^0(a)$точки a;

Не существует $f(a-0) = \lim f(x)$;

{ [Не существует $f(a+0) = {}_{xx\to}\lim{}_{\to aa+-00} f(x)$.

7.3 Непрерывность функции на множестве

Определение 7.3.1. Функция f называется *непрерывной* на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества X. Причем, для любого промежутка $l \subseteq X$, такого что

$\nexists$ промежуток l' такой, что $(l' \subseteq X) \wedge (l \subset l')$;

$\{$ функция f определена на левом конце промежутка l,

на левом конце промежутка l непрерывность понимается как правосторонняя. Для любого промежутка $l \subseteq X$, такого что $\nexists$ промежуток l' такой, что $(l' \subseteq X) \wedge (l \subset l')$;

$\{$

функция f определена на правом конце промежутка l, на правом конце промежутка l непрерывность понимается как левосторонняя.

Следствие 7.3.1. Из определения 7.2.4 следует, что функция f *непрерывна на отрезке* $[a;\ b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;\ b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Определение 7.3.2. Функция f называется *разрывной* на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если она не является непрерывной на этом множестве.

Теорема 7.3.1. Все основные элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

Теорему примем без доказательства.

Пример 7.3.1. Функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$:

1) непрерывная на множестве $X = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$;

2) разрывная на множестве $X = (-\infty;\ +\infty)$, так как имеет точку разрыва второго рода $a = -1 \in X$;

3) непрерывная на множестве $X = (-1;\ +\infty)$;

4) разрывная на множестве $X = [-1;\ +\infty)$, так как не является непрерывной справа в точке $= -1 \in X$.

Задача 7.3.1. Укажите, является ли функция $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ непрерывной на множествах:

1) $X = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$;

2) $X = (-\infty;\ +\infty)$;

3) $X = (-1;\ +\infty)$; 4));

$X = [-1;\ +\infty$
$X = (-1;\ 1)$
$X = [-1;\ 1)$
$X = (-1;\ 1]$
5) ; 6) ; 7)
.

Пример 7.3.2. Доказать, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в своей области определения.

◁ Область определения $D\left(\sqrt{x}\right) = [0;\ +\infty)$. Таким образом, по определению 7.3.1 необходимо показать, что функция $\sqrt{x}$: 1) непрерывна в каждой точке $a > 0$; 2) непрерывна справа в точке $a = 0$. Покажем, что имеет место утверждение 1). Во-первых, для каждой точки $a > 0$ существует окрестность этой точки $V(a) = \left(\frac{a}{2};\ \frac{3a}{2}\right) \subseteq D\left(\sqrt{x}\right)$, в которой функция $\sqrt{x}$ определена. Во-вторых, для любых $a, x > 0;\ a \neq x$ имеют место равенства $\left(|x-a| = \left|\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \cdot \left|\sqrt{x} + \sqrt{a}\right|\right) \Rightarrow \left(\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a}\right|} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)$. Так как, $\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a}$, то имеет место неравенство $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$, из которого следует, что $\forall\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \varepsilon\sqrt{a} > 0$, такое что $(0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow \left(\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon\right)$. То есть $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ и функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $a > 0$. Покажем, что имеет место утверждение 2). Во-первых, для точки $a = 0$ существует промежуток $[0;\ 1) \subseteq D\left(\sqrt{x}\right)$, на котором функция $\sqrt{x}$ определена. Во-вторых, $\forall\varepsilon, x > 0$ можно указать $\delta = \varepsilon^2 > 0$, такое что $(0 < |x-0| = |x| = x < \delta) \Rightarrow \left(\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x} < \varepsilon\right)$. То есть $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt{x} = \sqrt{0}$ и функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $a = 0$. ▷

Задача 7.3.2. Докажите, что функция f непрерывна в своей области определения:

1) $f = 3x + 1$;
2) $f = 1/x$;
3) $f = 1/x^2$;

4) $f = |x|$;
5) $f = \sin x$;
6) $f = \sqrt{x} \cdot \sin x$.

7.4 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 7.4.1. Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции cf $(c \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$ непрерывны в точке a. Если, кроме того, $g(a) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке a.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 7.4.2. Если функции $y = f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то композиция $g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Теорему примем без доказательства.

Следствие 7.4.1. Из теорем 7.4.1 и 7.4.2 следует, что знак предела можно переставлять со знаком непрерывной функции, а также следует правило замены переменной при вычислении предела.

7.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 7.5.1. Теорема Вейерштрасса. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

1) функция f ограничена на $[a; b]$;
2) функция f достигает на $[a; b]$ своих верхней и нижней граней, то есть существуют $x_1, x_2 \in [a; b]$ такие, что $f(x_1) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2) = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 7.5.2. Теорема о промежуточных значениях. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого $A \in \mathbb{R}$, заключенного между значениями $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $f(\xi) = A$.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 7.5.3. Теорема о непрерывности обратной функции.

1) Если функция f непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$, то существует обратная функция f^{-1}, которая непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно

$[f(b); f(a)]$).

2) Если функция f непрерывна и строго возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, то существует обратная функция f^{-1}, которая непрерывна и строго возрастает на интервале $(f(a+0); f(b-0))$ (соответственно $(f(b-0); f(a+0))$). При этом, если $a = -\infty$, то под пределом $f(a+0)$ понимают предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Если $b = +\infty$, то под пределом $f(b-0)$ понимают предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Теорему примем без доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгофф Г. Математика и психология. М.: Советское радио. 1977.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. М: МЦНМО. 2012.

3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа. 2004.

4. Пожарская Н. И. Что дает математика психологии? // Число и мысль.
Сборник. Выпуск 2. М.: Знание. 1979. С. 136 151. http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000009/st008.shtml

5. Журавлев Г.Е. Контуры математической психологии// Число и мысль. Сборник. Выпуск 2. М.: Знание. 1979. С. 6 33.

6. Чернавский А.В. Применение теории катастроф в психологии и экономике // Число и мысль. Сборник. Выпуск 2. М.: Знание. 1979. С. 121 135.

7. Левин К. Динамическая психология. М.: Смысл. 2001.

8. Иванников В.А. Основы психологии. Курс лекций. СПб.: Питер. 2010.

ПРИНЯТО
на заседании кафедры вычислительной математики Протокол
№___ от _________ 20___г.

ПРЯШНИКОВА Полина Федоровна

МАТЕМАТИКА

для направления подготовки 37.03.01. «Психология» **Часть 1**

Элементы математической логики и математического анализа

Учебное пособие

Техническая редакция __________

Макет и верстка _________

Формат А4 (60×84/8). Объем ___ п.л. Тираж ___экз.

299001, г. Севастополь, ул. Гер. Севастополя, д.7.