

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
филиал МГУ в г. Севастополе
факультет компьютерной математики
кафедра программирования

УТВЕРЖДАЮ



Директор
Филиала МГУ в г. Севастополе

О.А. Шпырко

2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

"МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"

Уровень высшего образования:

специалитет

Направление подготовки:

03.05.02 "Фундаментальная и прикладная физика"

(код и название направления/специальности)

Форма обучения:

Очная

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры программирования
протокол № 5 от «9» 06 2023 г.
Заведующий кафедрой

В.В. Ежов (В.В. Ежов)
(подпись)

Рабочая программа одобрена
Методическим советом
Филиала МГУ в г. Севастополе
Протокол № 9 от «28» июня 2023 г.

Л.И. Теплова (Л.И. Теплова)
(подпись)

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 03.05.02 «Фундаментальная и прикладная физика», утвержден приказом МГУ от 29 декабря 2018 года № 1780

Год (годы) приема на обучение 2022,2023

курс – 1,2

семестры – 1,2,3

зачетных единиц – 15

академических часов – 540 , в т.ч.:

лекций – 159

семинаров – 141

самостоятельная работа-240

Формы промежуточной аттестации: экзамен в 1,2,3 семестре

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Целями освоения учебной дисциплины математический анализ являются: обеспечение базовой математической подготовки студентов в области основных понятий и методов математического анализа, их применения при решении математических, физических и прикладных задач; формирование математической культуры.

«Математический анализ входит «в базовую часть блока общепрофессиональной подготовки ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА, установленного Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова для реализуемых образовательных программ высшего профессионального образования по направлению подготовки «Фундаментальная и прикладная Физика» образовательной программы..

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия

Математический анализ изучается в 1-3 семестрах, поэтому курс строится на знаниях ранее изученных школьных дисциплин, а также читаемого параллельно курса «Алгебра и геометрия». В дальнейшем знания и навыки, полученные при изучении данной дисциплины, являются основой для освоения следующих профессиональных и специальных дисциплин: Теория вероятностей, Численные методы, Уравнения математической физики, Функциональный анализ

3. Результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников

Планируемые результаты обучения по дисциплине:

Знать: основные определения и понятия курса, основные принципы и теоремы из области математического анализа, доказательства базовых теорем и фактов.

Уметь: решать типовые задачи курса, применять математические методы для решения практических задач.

Владеть: профессиональными знаниями касательно основных теоретических положений, принципов и методов математического анализа, критически анализировать и излагать базовую информацию.

4. Формат обучения очная

Формат обучения очный (в аудитории)

5. Объем дисциплины

Составляет 23.е., в том числе 36 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (аудиторная нагрузка), 36 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.

6 Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

6.1 Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

№	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля) Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Номинальные трудозатраты обучающегося		Всего академических часов	Форма текущего контроля успеваемости	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы				Самостоятельная работа обучающегося, академические часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа			
	Введение	4	2	6	12	опрос
1	Тема 1. Теория вещественных чисел	8	6	12	26	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.
2	Тема 2. Предел последовательности	12	10	14	36	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания. Контрольная
3	Тема 3. Предел функции и непрерывность	16	16	10	42	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.
4	Тема 4. Основы дифференциального	10	10	12	32	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания
5	Тема 5. Неопределенный интеграл	4	10	10	24	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания. Контрольная работа
	<i>Промежуточная аттестация</i>			8	8	<i>экзамен</i>
	Итого за 1 семестр	54	54	72	180	
6	Тема 6. Исследование функций при помощи производных	4	4	10	18	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.
7	Тема 7. Определенный интеграл	6	6	10	22	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.
8	Тема 8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	11	11	14	36	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.
9	Тема 9. Кратные интегралы.	10	10	12	32	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания.

10	Тема 10. Криволинейные интегралы	10	10	12	32	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания. Контрольная работа
11	Тема 11. Основы теории поля	10	10	12	32	Опрос, проверка домашнего задания, практические
	<i>Промежуточная аттестация</i>			8		<i>экзамен</i>
	Итого за 2 семестр	51	51	57	180	
12	Тема 12. Числовые ряды	10	6	12	28	Опрос, проверка домашнего задания, практические
13	Тема 13. Функциональные последовательности и ряды	6	6	10	22	Опрос, проверка домашнего задания, практические
14	Тема 14. Степенные ряды	8	6	12	26	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания. Контрольная работа
15	Тема 15. Ряды Фурье	10	8	16	34	Опрос, проверка домашнего задания, практические
16	Тема 16. Преобразования Фурье и Лапласа	10	6	16	32	Опрос, проверка домашнего задания, практические
17	Тема 17. Элементы теории обобщенных функций	10	4	16	30	Опрос, проверка домашнего задания, практические задания. Контрольная работа
	<i>Промежуточная аттестация</i>			8	8	<i>экзамен</i>
	Итого за 3 семестр	54	36	90	180	
	ИТОГО	159	141	240	540	

6.2 Содержание разделов дисциплины

№	Наименование разделов (тем) дисциплины	Содержание раздела (тем)
1	Введение	Метод математической индукции. Неравенство Бернулли. Неравенства для среднего гармонического, среднего геометрического, среднего арифметического, среднего квадратичного. Формальное дифференцирование и интегрирование
2	Тема 1. Теория вещественных чисел	Рациональные числа и их свойства. Элементы теории множеств и теория действительных чисел (бесконечных десятичных дробей). Правила сравнения вещественных чисел. Приближение вещественного числа рациональными числами. Арифметические операции над вещественными числами. Теорема о существовании точных граней у ограниченного числового множества. Понятие отображения множеств. Взаимно-однозначные отображения, эквивалентность множеств. Счетные множества и множества мощности континуум. Решение задач по теме.
3	Тема 2. Предел последовательности	Числовые последовательности. Арифметические операции над последовательностями. Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно малые и

		<p>бесконечно большие последовательности. Их основные свойства, связь между ними. Сходящиеся последовательности и их основные свойства.</p> <p>Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенства, теорема "о двух милиционерах". Достаточное условие сходимости монотонной последовательности. Лемма о стягивающихся сегментах. Число ϵ. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.</p> <p>Подпоследовательности и предельные точки. Множество предельных точек последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательности. Доказательство того, что верхний и нижний пределы последовательности являются элементами множества предельных точек последовательности. Критерий сходимости последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов. Решение задач по теме.</p>
4	Тема 3. Предел функции и непрерывность	<p>Определение числовой функции одного числового аргумента. Примеры известных функций: Хэвисайда, Дирихле, Римана, $\text{sgn}(x)$ и некоторые другие. Предел по Коши и по Гейне. Доказательство их эквивалентности. Односторонние пределы. Арифметические операции. Предел суперпозиции. Предельный переход в неравенствах. Критерий Коши существования конечного предельного значения. Ограниченность функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции в конечной точке и на бесконечности. Правила сравнения. O, o, O^*, o^* символика. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке, на множестве. Локальные свойства непрерывной функции: ограниченность в точке, сохранение знака, арифметические операции. Непрерывность суперпозиции. Монотонность функции. Критерий непрерывности строго монотонной функции. Непрерывность обратной функции. Элементарные функции и их основные свойства. Классификация точек разрыва. Кусочно-непрерывные функции. О точках разрыва монотонных функций. Глобальные свойства непрерывных функций: прохождение через ноль; I теорема Вейерштрасса; II теорема Вейерштрасса. Монотонность функции, имеющей обратную. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора. Решение задач по теме.</p>
5	Тема 4. Основы дифференциального исчисления	<p>Определение производной в точке. Односторонние производные. Геометрический смысл производной. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Локальный экстремум. Достаточное условие строгой монотонности дифференцируемой функции в точке. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.</p> <p>Теорема Ролля. Арифметические операции над функциями, имеющими производную. Дифференцируемость суперпозиции. Производная обратной функции. Первый дифференциал. Инвариантность формы первого</p>

		<p>дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков.</p> <p>Производная функции, заданной параметрически.</p> <p>Монотонность в точке. Локальный экстремум. Достаточное условие строгой монотонности дифференцируемой функции в точке. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Постоянство функции, производная которой равна нулю. Обобщенная формула конечных приращений. Необходимость условий в этих теоремах. Решение задач по теме.</p>
6	Тема 5. Неопределенный интеграл	<p>Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям. Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталья. Другие виды неопределенностей. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха-Роша, Лагранжа, Коши, Пеано. Решение задач по теме.</p>
7	Тема 6. Исследование функций при помощи производных	<p>Понятие графика функции. Первое достаточное условие локального экстремума. Второе достаточное условие локального экстремума.</p> <p>Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. Решение задач по теме.</p>
8	Тема 7. Определенный интеграл	<p>Понятие определенного интеграла. Интегральные суммы. Предел интегральных сумм. Верхние и нижние суммы и их свойства. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Приложения определенного интеграла в задачах физики и геометрии. Решение задач по теме.</p>
9	Тема 8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	<p>Частные производные. Производные старших порядков. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Дифференциал функции нескольких переменных. Необходимое условие дифференцируемости. Сложные функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Дифференциал сложной функции. Производная по направлению и градиент. Векторно-матричная форма записи дифференциала сложной функции. Дифференциалы высших порядков. Символические формулы для дифференциала. Формула Тейлора. Локальный экстремум. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Понятие неявной функции. Теоремы о неявной функции, определяемой одним уравнением. Функциональный определитель (Якобиан). Сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме: Метод Лагранжа. Необходимые условия условного экстремума в форме Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума в форме Лагранжа. Решение задач по теме.</p>

10	Тема 9. Кратные интегралы.	Двойной интеграл по прямоугольнику. Криволинейные координаты на плоскости. Мера Жордана. Квадрируемые области. Определение интеграла по области. Простые области. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Тройной интеграл. Сведение тройного интеграла к повторному. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. Решение задач по теме.
	Тема 10. Криволинейные интегралы	Криволинейные координаты в пространстве. Цилиндрические и сферические координаты. Геометрические и физические приложения кратных интегралов. Понятие кривой и поверхности. Параметрические уравнения. Понятие многообразия. Криволинейные интегралы первого рода (определение, вычисление с помощью определенного интеграла). Криволинейные интегралы второго рода по кривой (определение, вычисление с помощью определенного интеграла). Решение задач по теме. Решение задач по теме.
11	Тема 11. Основы теории поля	Криволинейные интегралы второго рода по поверхности (определение, вычисление с помощью определенного интеграла). Связь с криволинейными интегралами первого рода. Физические приложения криволинейных интегралов первого и второго рода. Скалярные и векторные поля. Дифференциальные формы, связанные с полем. Дивергенция, градиент, ротор. Формулы Грига, Стокса, Гаусса-Остроградского. Решение задач по теме.
12	Тема 12. Числовые ряды	Числовые ряды. Частичные суммы и остаток ряда. Стремление общего члена сходящегося ряда к нулю. Свойства сходящихся рядов (линейность). Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами. Достаточные условия сходимости рядов с неотрицательными членами: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши. Теоремы сравнения. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Условно сходящиеся ряды. Признаки Дирихле и Абеля. Решение задач по теме.
13	Тема 13. Функциональные последовательности и ряды	Понятие равномерной сходимости. Признак равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Два признака Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Дини равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда). Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Решение задач по теме.
14	Тема 14. Степенные ряды	Степенной ряд и область его сходимости. Теорема Коши-Адамара. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда. Необходимые и достаточные условия разложимости функций в степенной

		ряд. Бесконечно дифференцируемые и аналитические функции. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора. Решение задач по теме.
15	Тема 15. Ряды Фурье	Ортонормированные системы. Наилучшее приближение элемента евклидова пространства. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя. Тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система в комплексной форме. Интегральное представление частных сумм ряда Фурье. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации Римана. Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье. Простейшие условия равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема о почленном дифференцировании рядов Фурье. Теорема Фейера и ее следствия. Решение задач по теме.
	Тема 16. Преобразования Фурье и Лапласа	Определения преобразования Фурье и его простейшие свойства. Вычисление преобразований Фурье некоторых функций. Пространства интегрируемых в квадрате функций. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье как унитарный оператор. Алгебраические соотношения. Понятие нормы. Преобразование Лапласа и его свойства. Таблица преобразований Лапласа. Вычисление преобразований Лапласа некоторых функций. Решение задач по теме.
	Тема 17. Элементы теории обобщенных функций	Тестовые функции и их классы. Обобщенные функции как линейные функционалы на пространствах тестовых функций. Регулярные функции. Операции над обобщенными функциями. Вычисление производных простейших обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.

7. Фонд оценочных средств для оценивания результатов обучения по дисциплине

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2	3	4	5
РО и соответствующие виды оценочных средств				
Знания контрольные работы, тесты	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения Практические задания	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) Написание и защита	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении

индивидуального задания на выбранную тему		опыта)		задач
---	--	--------	--	-------

7.1 Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые могут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы:

- решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений;
- выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствии с планом лекций.

Примерные задания контрольной работы:

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
2. Найти производную $f(x) = \sin(x^{2 \cos x}) \ln \sin x$.
3. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sin x} dx$
4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{x^2 + x + 2} dx$
5. Вычислить интеграл $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$
6. Существует ли предел $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
7. Найти частные производные функции $f(x, y) = \frac{\sin(x + \cos xy)}{e^{\sin(\ln x + yx)}}$
8. Найти дивергенцию и ротор поля $F = (x + y + \sin z, \ln(xyz), (x + y + z)^2)$
9. Исследовать на локальные экстремумы функцию $f(x, y) = 3x^2 + 5xy - 2y^2 - 6x - 7y + 2$
10. Вычислить частные производные функции $g(u, v) = f\left(\frac{u}{v}, uv\right)$, используя инвариантность формы первого дифференциала

7.2 Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Понятие точной верхней и нижней грани. Аксиома Вейерштрасса.
2. Классификация точек множества.
3. Предел последовательности. Критерий Коши существования предела.
4. Теоремы о пределах последовательностей.
5. Лемма Кантора о вложенных отрезках.
6. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

7. Понятие компактности.
8. Предел функции. Критерий Коши.
9. Теоремы о пределах функций.
10. Первый и второй замечательный пределы.
11. Локальные свойства непрерывных функций.
12. Глобальные свойства непрерывных функций.
13. Понятие производной и дифференциала.
14. Геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной.
15. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.
16. Формула Тейлора.
17. Правило Лопиталю.
18. Первообразная и неопределенный интеграл.
19. Локальные экстремумы и условия монотонности функции.
20. Правила подсчета неопределенных интегралов.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Определенный интеграл и его свойства.
2. Суммы Дарбу и критерий Дарбу.
3. Классы интегрируемых функций.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Частные производные. Дифференцируемость функции многих переменных.
6. Производная по направлению и градиент.
7. Равенство смешанных производных.
8. Квадрируемость области по Жордану.
9. Кратный интеграл по области и его свойства.
10. Сведение кратного интеграла к повторным.
11. Замена переменных в кратном интеграле.
12. Интегралы первого рода.
13. Интегралы второго рода.
14. Ротор, дивергенция, градиент.
15. Дифференциальные формы и операции над ними.
16. Общая формула Стокса.
17. Формула Грина.
18. Формула Гаусса-Остроградского.
19. Формула Стокса для поверхностей.
20. Формы связанные с полем. Коммутативные диаграммы.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Числовые ряды. Их сходимость. Критерий Коши.

2. Теоремы сравнения.
3. Признак Даламбера и радикальный признак Коши.
4. Признак Лейбница.
5. Интегральный признак Коши.
6. Типы сходимости функциональных рядов.
7. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.
8. Область сходимости степенного ряда. Формулы Коши-Адамара и Даламбера.
9. Разложение функций в ряд Тейлора. Аналитические функции.
10. Ряд Фурье. Его частичные суммы.
11. Ядро Дирихле и его свойства.
12. Достаточные условия сходимости рядов Фурье.
13. Наилучшее приближение и модуль гладкости. Теорема Джексона.
14. Преобразование Фурье и его свойства.
15. Теорема Планшереля.
16. Дифференцирование обобщенных функций.
17. Преобразование Фурье обобщенных функций.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение

а) основная литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс/ - М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса/ - М.: Изд-во МГУ, 1987.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. I, М.: Наука, 1998.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. II, М.: Наука, 1998.
5. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1999.

б) дополнительная литература

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов. В 3 т. – М.: Высш. Школа., 1988.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Наука, 1966.
3. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу/ И.А.Виноградова, С.Н. Олехник, В.А.Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий. В.А. В.А.Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1991.

8.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины

При проведении занятий используется аудитория, оборудованная при необходимости проектором и компьютер с установленным на нем браузером и программным обеспечением для демонстрации презентаций (PowerPoint и др.). Для выполнения практических заданий и тестирования используется LMS на базе платформы Moodle. Для самостоятельной работы с медиа материалами каждому студенту требуется персональный компьютер или планшет, широкополосный доступ в сеть Интернет, браузер последней версии, устройство для воспроизведения звука (динамики, колонки, наушники и др.).

