Секция «Прикладная математика»

Оптимизация некоторых параметров численного приближения на языке C/C++

Федотов Андрей Александрович

Студент (бакалавр)

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Севастополе, Факультет компьютерной математики, Кафедра прикладной математики, Севастополь, Россия

E-mail: matym6eu@gmail.com

В современной теории приближений выделяют приближение периодических функций одной и нескольких переменных тригонометрическими полиномами (тригонометрическая аппроксимация), приближение функций, заданных на отрезке вещественной оси. Средние Фурье являются обобщением метода тригонометрической аппроксимации.

Теоретической базой для ее решения служат средние Фурье

см.рисунок средние Фурье

Метод приближения посредством средних Фурье широко используется не только в теоретических исследованиях, но и для численной аппроксимации тех или иных конкретных функций. В силу того, что генератор - это произвольная функция, принадлежащая достаточно широкому классу, в приложениях часто возникает естественная задача его оптимального выбора.

Ясно, что для обеспечения оптимальности приближения средними $F_n^{(\φ)}$функция φ должна быть выбрана таким образом, чтобы не зависящая от f и n константа, была наименьшей. В этой связи возникает следующая экстремальная задача:

См.рисунок экстремальная задача

Хотя она не имеет точного теоретического решения, ее некоторое приближенное решение может быть найдено с помощью той или иной вычислительной процедуры, основанной на наложении некоторых дополнительных условий на генератор. Так, например, если принять, что функция φ - четный алгебраический многочлен той или иной степени в области ρ ≤ | ξ | ≤ 1, т. е. в области «склейки» значений 0 и 1,то ее преобразование Фурье может быть вычислено в явной форме, а функционал становится функцией конечного числа параметров - коэффициентов многочлена. Задача его минимизации может быть решена путем введения равномерной решетки с некоторым шагом в области допустимых параметров и компьютерного вычисления соответствующих L1-норм с использованием пакетов стандартных программ.

Например возьмем функцию φ(x)=ax^2+bx+c

Для того чтобы использовать данную формулу нам нужно знать значение функции.

Значение может быть вычислено как:

φ(x)=ax^2+bx+c , x∈[0;1]

Пусть a - свободный параметр

параметр может быть вычислен a_j=a*+h*j

В итоге получаем систему из

φ$_j$(x)=1,[-1/2,1/2]

φ$_j$(x)=0, [-,-1]∪[1,+]

φ$_j$(x)=ax^2+(-3/2-2)*x+(a/2+2), 1/2< | x| < 1

2. Выполним преобразование Фурье

4.Найдем min от интеграла от нормы преобразования Фурье

Получим оптимальную склейку aj_0,bj_0,c_{j0}

Источники и литература

1) Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2) Lasser R., Runovski K. General convergence theory for methods of trigonometric approximation
3) Runovski K., Schmeisser H.-J. On the convergence of Fourier means and interpolation means
4) DeVore R., Lorenz G. Constructive Approximation. Berlin-Heidelberg: Springer, 1993.

Иллюстрации

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L_1(\mathbb{R})} \longrightarrow \min, \quad \varphi \in \mathcal{K};\ \varphi(\xi) = 1,\ |\xi| \le \rho.$$

Рис. 1. экстремальная задача

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi$$

Рис. 2. Средние Фурье