

## Задача «Оптическая фильтрация изображения»

### Введение

В 70-х годах XIX века немецкий оптик Эрнст Аббе исследовал возможности улучшения качества изображения, наблюдаемого в микроскоп. В экспериментах с объектами, имеющими периодическую структуру (чешуйками на крыльях насекомых) он обнаружил, в частности, что изображение тем лучше, чем больше апертура (диаметр) объектива микроскопа. Аббе показал, что влияние апертуры объектива связано с дифракцией света на наблюдаемом объекте.

Согласно созданной им теории, процесс формирования линзой-объективом оптического изображения несамосветящегося объекта делится на два этапа: Фурье-анализ исходного светового поля объекта и Фурье-синтез полученного изображения. **Фурье-анализ** исходного поля, то есть *разложение его на пространственные гармоники*, осуществляется в процессе распространения световой волны от линзы до ее задней фокальной плоскости. Его результат может быть рассчитан как пространственное преобразование Фурье от волны, падающей на объектив, то есть ее *пространственный спектр*. **Фурье-синтез** изображения происходит в процессе дальнейшего распространения света от задней фокальной плоскости линзы до плоскости изображения. Математически он описывается как *результат обратного преобразования Фурье*. В результате в плоскости изображения формируется распределение интенсивности света, подобное распределению интенсивности в исходной волне, которое и называется оптическим изображением объекта.

В отличие от геометрической оптики, теория Аббе основывается на волновых свойствах света и явлении **дифракции света**. Она играет существенную роль при наблюдении объектов, размеры которых сравнимы с длиной световой волны. Дифракция приводит к искажению изображения (то есть отличию распределений интенсивности в исходной и итоговой волнах). Это искажение усиливается с уменьшением наблюдаемых предметов. Поэтому особо важен учет дифракционных явлений в микроскопии.

**Целью настоящей работы** является исследование взаимосвязи характеристик оптической системы и вида изображения несамосветящегося объекта, имеющего периодическую структуру.

## Основы теории формирования оптического изображения

Аббе удалось совершенно по-новому, с позиций волновой оптики, объяснить действие обычной линзы и более сложных оптических систем. Для пояснения его теории рассмотрим действие одиночной собирающей линзы (см. рис. 1), выполняющей роль объектива оптического прибора (например, микроскопа). Будем считать, что у этого объектива полностью исправлены все геометрические аберрации (то есть искажения изображения, возникающие из-за неидеальности объектива, его отклонений от модели *тонкой линзы*).

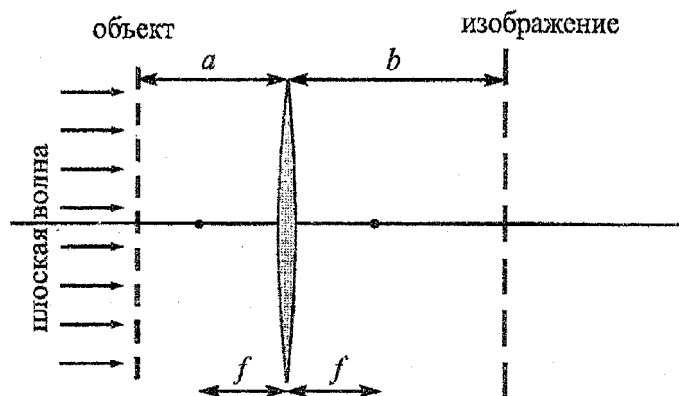


Рис. 1. К формированию изображения линзой.

Линза освещается параллельным когерентным пучком монохроматического света. На некотором расстоянии  $a$  от нее, перед передним фокусом, расположен плоский наблюдаемый объект (частично непрозрачный). Линза создает действительное перевернутое изображение в плоскости на расстоянии  $b$ . Оно рассчитывается по *формуле тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $a$  и  $b$  – расстояние от линзы до оптически сопряженных плоскостей. Если  $f < a < 2f$ , то  $b > 2f$  и изображение является увеличенным; при  $a = b = 2f$  размеры объекта и изображения совпадают.

Несамосветящийся объект представляет собой набор поглощающих свет препятствий. Любые две точки объекта, пропускающие свет, являются когерентными вторичными источниками. Можно считать, что прошедшая через его прозрачные участки световая волна порождает когерентные вторичные волны. Изображение в оптической системе получается за счет свободного распространения этих волн. Следовательно, согласно *принципу Гюйгенса-Френеля*, будет наблюдаться *интерференция вторичных волн*, дающая некоторую *дифракционную картину*.

Собирающая линза не изменяет интенсивности вторичных волн, а вносит добавку в их фазу. Добавка зависит от точки падения волны на линзу и увеличивается при удалении от ее главной оптической оси.

Поскольку дифрагировавший световой пучок попадает на объектив, то в его задней фокальной плоскости можно наблюдать картину, соответствующую *дифракции Фраунгофера*. В этом и заключается выделенный Аббе **первый этап** формирования изображения.

Дифракционную картину Фраунгофера, получающуюся в фокальной плоскости объектива, можно также рассматривать как совокупность вторичных источников. **Второй этап** формирования изображения заключается в свободном распространении волн от них за задней фокальной плоскостью линзы. Результат их интерференции и формирует изображение объекта в оптически сопряженной плоскости на расстоянии  $b$  от линзы.

С математической точки зрения распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы связано с распределением интенсивности в падающей волне с помощью *прямого преобразования Фурье*. Это преобразование применяется не к функции времени  $f(t)$ , а к функции двух пространственных переменных  $f(x,y)$ . Результатом является не временной спектр (то есть набор гармонических колебаний разной амплитуды с разными частотами  $\omega_i$ ), а **пространственный спектр** волны, то есть набор плоских волн разной амплитуды, распространяющихся под разными углами  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{yj}$  к главной оптической оси линзы. Распределение интенсивности в фокальной плоскости объектива также часто называют **Фурье-спектром** (или **угловым спектром**) излучения объекта, а первый этап формирования изображения – **Фурье-анализом** светового поля объекта. Второй этап с этой точки зрения соответствует *обратному преобразованию Фурье* и часто называется **Фурье-синтезом** изображения.

Очень важно отметить, что на первом этапе в объектив попадут не все вторичные волны, потому что **апертура** (диаметр) линзы ограничена. Поэтому дифракционная картина в фокальной плоскости будет отличаться от картины для бесконечной волны, и в формировании изображения на втором этапе примут участие не все возможные источники. Из-за того, что часть вторичных волн теряется, изображение на выходе оптического прибора окажется менее четким, чем сам объект. Это называется **виньетированием** изображения.

С математической точки зрения виньетирование происходит потому, что часть пространственных гармоник исходного излучения отбрасывается и не участвует в синтезе. Строго говоря, виньетирование будет отсутствовать у объектива с бесконечно большой апертурой.

Соответствие между объектом и его изображением также зависит и от того, сколько вторичных источников (и какие конкретно из них) принимает участие в интерференции на втором этапе формирования изображения. Итоговое изображение можно дополнительно исказить, изменив амплитуду и (или) фазу у части источников, то есть исказив пространственный (угловой) спектр объекта. Для этого достаточно поместить в заднюю фокальную плоскость линзы экран, диафрагму, фазовую пластинку или другое препятствие, перекрывающее только часть вторичных источников. В результате одни детали в изображении могут быть усилены, а другие – ослаблены (или совсем удалены). Процесс преобразования углового спектра называется **пространственной фильтрацией** оптических изображений (оптических полей). Виньетирование изображения – один из случаев пространственной фильтрации, осуществляемый объективом оптической системы. В экспериментальной части задачи производится пространственная фильтрация изображения объекта, имеющего периодическую структуру – сетки или дифракционной решетки.

#### Опыты Аббе-Портера

Первыми экспериментами, проверяющими теорию формирования изображения и показывающими возможность оптической фильтрации изображения, были опыты Э. Аббе (1873 г.), впоследствии продолженные Альбертом Портером (1906 г.).

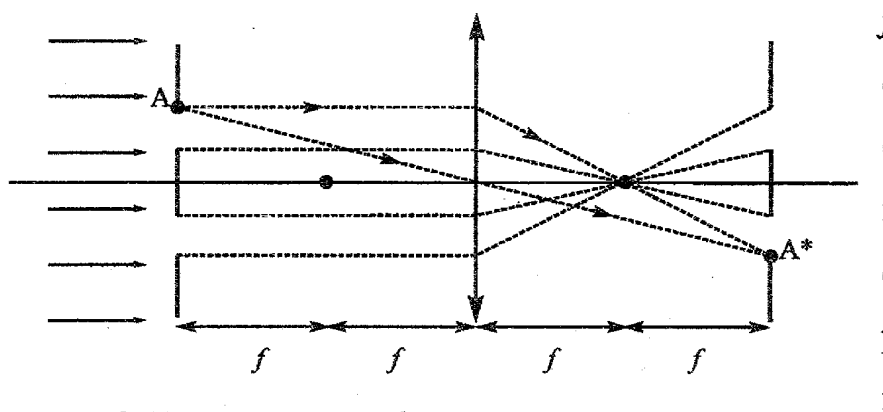


Рис. 2. Построение геометрического изображения решетки.

Если в эксперименте решетку расположить на расстоянии двух фокусных расстояний от линзы, то ее действительное изображение будет сформировано на том же расстоянии (см. рис. 2). Для простоты на рисунке изображены только две щели решетки. При геометрическом построении от диаметра объектива будет зависеть только освещенность изображения, но не его качество.

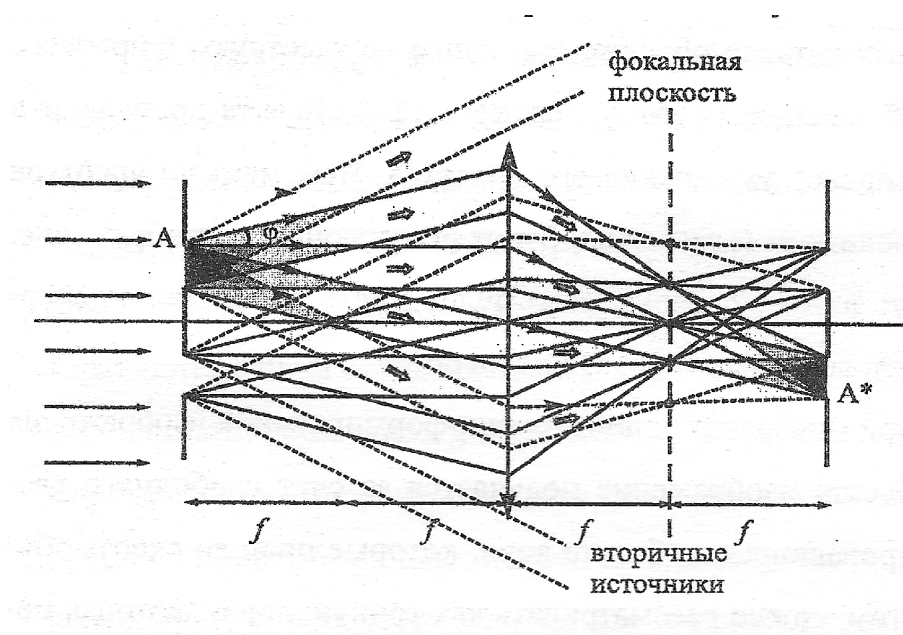


Рис. 3. Учет дифракции при построении изображения.

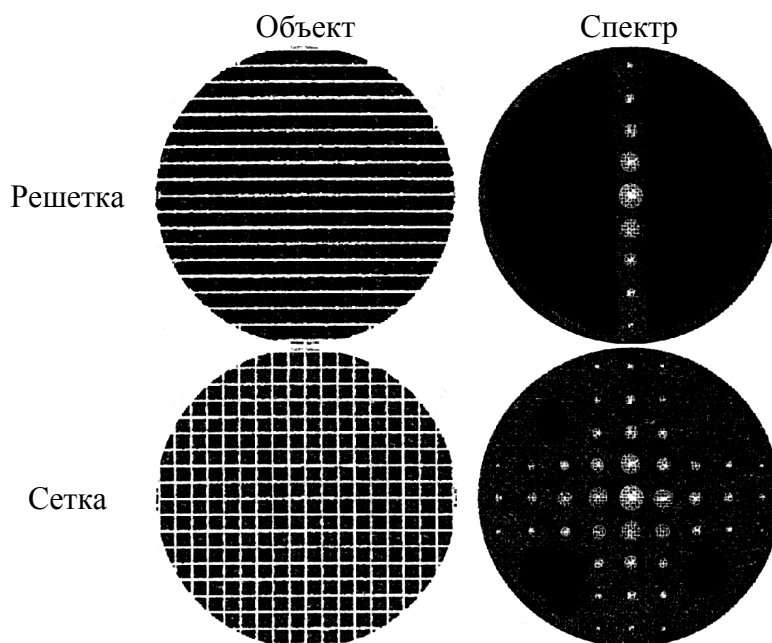


Рис. 4. Изображения и пространственные спектры для различных объектов

Для дифракционной решетки легко рассмотреть результат дифракции. На рис. 3 схематически изображены несколько дифрагировавших волн (от 0 до  $\pm 2$  порядка дифракции). Эти плоские волны распространяются до линзы, частично перехватываются ею и далее формируют изображение решетки. Чем меньше период решетки  $d$ , тем больше углы отклонения от оси плоских волн, соответствующих  $n$ -му порядку дифракции:

$$\sin \varphi_n = n \lambda / d,$$

где  $\lambda$  – длина волны света. Углы лежат в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , причем при  $d \approx \lambda$  угол дифракции стремится к  $90^\circ$ . Эта закономерность справедлива при дифракции на любом

объекте, то есть **волны, испытавшие дифракцию на мелких деталях объекта, отклоняются на большие углы.** Это означает, что для воспроизведения мелких деталей изображения необходимо обеспечить попадание в объектив максимумов высоких порядков.

Если в апертуру объектива попадает только дифрагировавшая волна нулевого порядка, то на выходе из системы наблюдается равномерно освещенное поле. Яркость получившейся волны существенно ниже, чем у падающего пучка света, но информации об объекте она не несет.

При попадании в апертуру обоих дифракционных максимумов первого порядка распределение интенсивности в изображении будет представлять собой гармоническую функцию с периодом, равным периоду решетки (результат интерференции двух плоских волн, распространяющихся под углом  $2\varphi_1$ ). Подчеркнем, что форма этого распределения – косинусоида, вне зависимости от того, какова функция пропускания решетки: резкие края объекта на изображении размыты.

При попадании все большего числа пространственных гармоник косинусоида постепенно трансформируется в меандр (последовательность прямоугольников): края изображения становятся более резкими, приближаясь к функции пропускания исходной решетки, а само изображение – более контрастным.

Если в апертуру попадут только максимумы второго порядка, то изображение будет представлять собой нерезкую (косинусоидальную) решетку, штрихи которой расположены в два раза чаще, чем у исходной (угол между интерферирующими волнами  $2\varphi_2$ ).

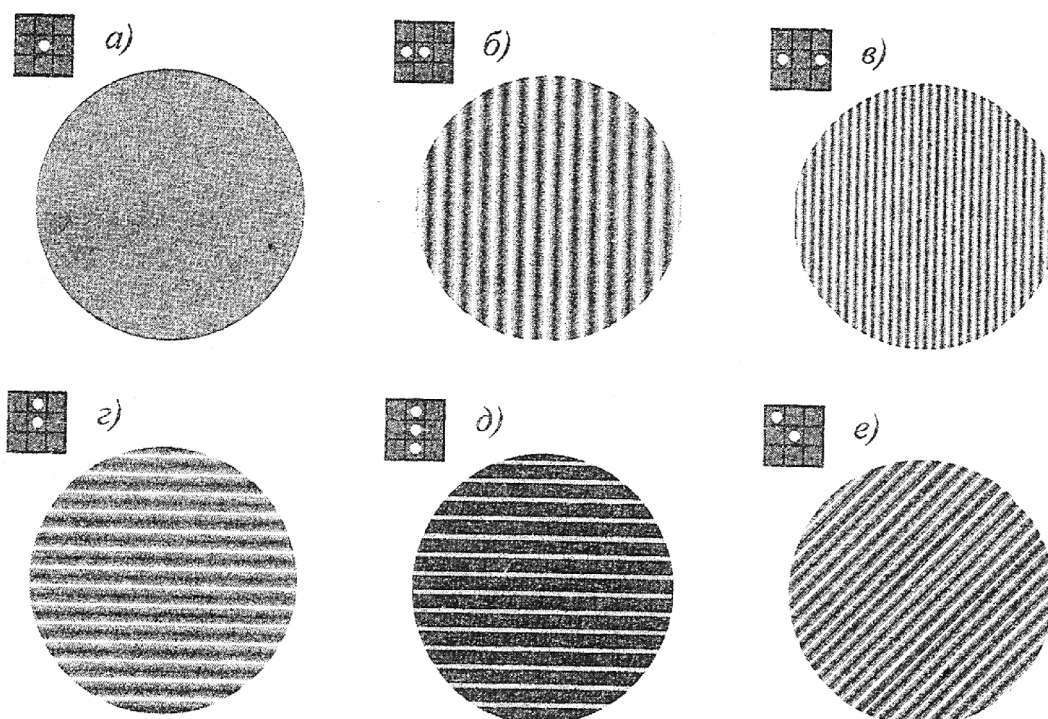


Рис. 5. Результаты оптической фильтрации.

На рис. 5 показаны результаты оптической фильтрации изображения квадратной сетки, полученные при различных вариантах маскирования (диафрагмирования) ее пространственного спектра. Над каждым изображением сверху слева схематически изображено, какие из максимумов младших порядков пропускаются пространственным фильтром (диафрагмой) и участвуют в Фурье-синтезе изображения (нулевой максимум – в центре таблички 3×3). Видно, что при выделении дифракционных максимумов, лежащих на некоторой прямой, в изображении решетки теряются штрихи, перпендикулярные этой прямой, а параллельные ей остаются. Если избирательно выделить максимумы (например, расположенные под углом в 45° к направлению штрихов), то изображение сетки окончательно теряет сходство с оригиналом (см. рис. 5е). Это показывает возможности фильтрации оптических полей.

### Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 6. Источником света служит лазерный диод (лазерная указка) 1, излучающая практически параллельный когерентный пучок света небольшого диаметра. Длина волны излучения составляет примерно  $\lambda \approx 650$  нм. После линзы 2 пучок становится слабо расходящимся и попадает на образец 3 (квадратная решетка с шагом  $d = 0,25$  мм). Далее свет проходит через объектив 4, в фокальной плоскости которого установлен пространственный фильтр (диафрагма) 5, и попадает на экран 6, на котором происходит наблюдение получившегося изображения.

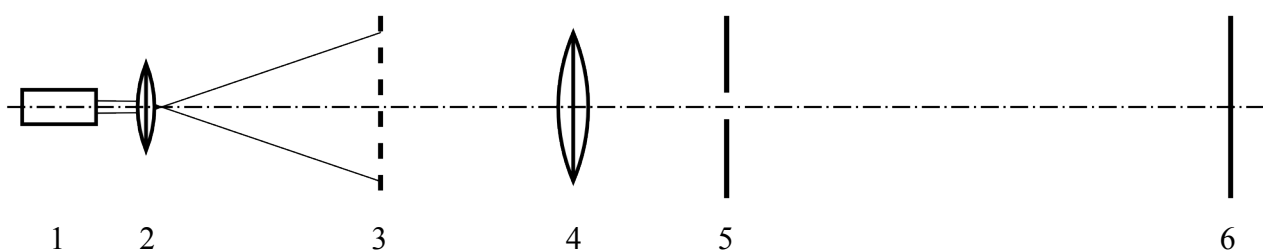


Рис. 6. Схема экспериментальной установки (пояснения см. в тексте)

## Упражнения

### Упражнение 1. Подготовка к выполнению задачи

Установите все элементы оптической схемы, кроме диафрагмы. Включите лазер. Пронаблюдайте изображение объекта 3 на экране 6, при необходимости поменяйте разверните объектив 4 для получения резкого изображения. Поверните объект так, чтобы его штрихи (или часть его штрихов в случае сетки) были вертикальны. Зарисуйте изображение. Пронаблюдайте пространственный спектр объекта в фокальной плоскости объектива. Зарисуйте его.

### Упражнение 2. Изучение зависимости вида изображения от ширины маски

Установите щель переменной ширины в качестве пространственного фильтра 5. Губки щели должны быть сориентированы вертикально. Поворотом держателя вокруг вертикальной оси добейтесь того, чтобы пучок проходил по центру щели.

### Упражнение 3. Изучение зависимости вида изображения от ориентации маски

## Контрольные вопросы

1. Каков пространственный спектр светового пучка, даваемого одной щелью? Двумя щелями?  $N$  щелями?
2. Для чего необходима линза, расширяющая пучок лазерной указки?
3. Чем пространственный спектр прямоугольной сетки похож на пространственный спектр решетки и чем отличается от него?
4. Где наблюдается пространственный спектр изучаемого объекта?
5. Что такое виньетирование?
6. Почему при пропускании через пространственный фильтр двух максимумов распределение интенсивности в изображении становится гармоническим?
7. Почему при выделении дифракционных максимумов, лежащих на прямой, наклоненной под углом  $45^\circ$  к направлению штрихов сетки, изображение представляет собой решетку, штрихи которой ближе в  $\sqrt{2}$  раз?
8. Почему контраст изображения падает при уменьшении числа формирующих его гармоник?