

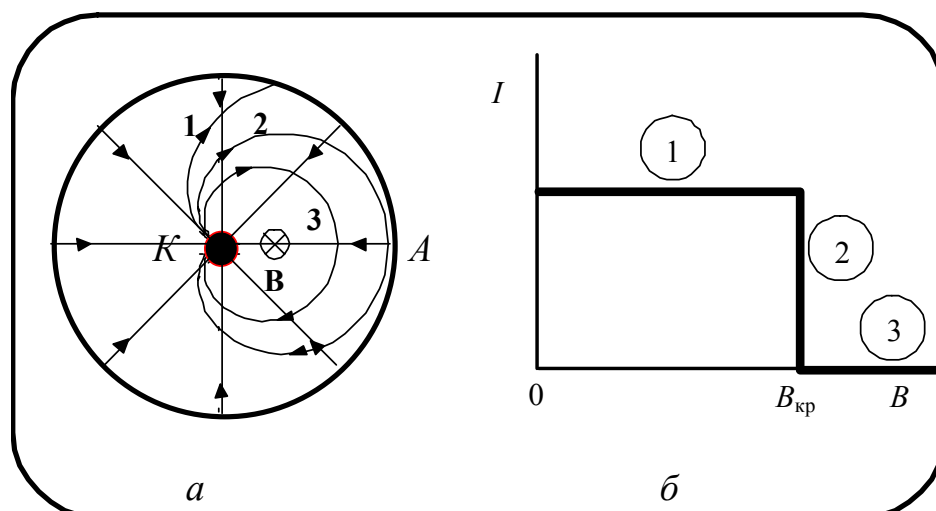


Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Лабораторный практикум по общей физике

Электричество и магнетизм

Определение удельного заряда электрона



МОСКВА 2008

## Определение удельного заряда электрона

### *Теоретическое введение*

В задаче удельный заряд электрона определяется экспериментально методами вакуумной электроники двумя способами. Первый основан на использовании закона Чайлда-Ленгмюра (закона “трех вторых”), описывающего ток в вакуумном диоде. Второй основан на закономерностях движения электрона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях (“метод магнетрона”).

### *Закон “трех вторых”*

Электрический ток в вакууме принципиально отличается от случая тока в проводнике тем, что в вакууме нет собственных носителей тока, которые по этой причине должны создаваться сторонними источниками электронов или ионов. Свободные электроны в вакууме можно получить за счет их вылета из металла под действием высокой температуры (термоэлектронная эмиссия), путем приложения сильного электрического поля (автоэлектронная эмиссия), а также другими способами.

В отличие от проводников, в вакууме сила тока связана с приложенной разностью потенциалов более сложной зависимостью, чем закон Ома  $I = U/R$ . Закон Ома предполагает рассеяние носителей тока на атомах вещества, в результате чего их усредненная (дрейфовая) скорость оказывается пропорциональна силе, действующей на них со стороны электрического поля. Этим и объясняется пропорциональность тока и напряжения. Разумеется, в вакууме такого рассеяния нет, и прямо пропорционально силе будет не средняя скорость, а ускорение носителей тока.

Другой важной причиной является влияние пространственного заряда. В проводниках заряд носителей тока в точности скомпенсирован всеми остальными зарядами, входящими в структуру материала. Однородные проводники при прохождении через них тока остаются в своем объеме электрически нейтральными, а свободные заряды могут появляться только на их поверхностях и местах контакта. Напротив, в вакууме заряд носителей тока ничем не скомпенсирован, и на их движение оказывает влияние не только внешнее приложенное электрическое поле, но и электрическое поле пространственного заряда самих носителей. Рассмотрим эти особенности на примере вакуумного диода.

Для упрощения математической стороны проблемы ограничимся наиболее простым случаем “плоского” диода, у которого катод и анод являются плоскопараллельными пластинами с размерами, много большими расстояния  $D$  между ними, так что краевыми эффектами можно пренебречь. Все величины в такой системе зависят только от одной координаты – расстояния от катода.

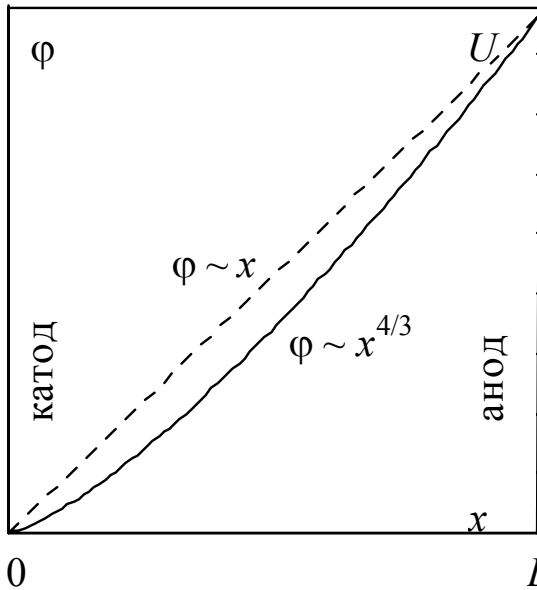


Рис.1 Электрический потенциал внутри плоского диода:

сплошная линия – с учетом пространственного заряда;

пунктир – без пространственного заряда  
 скоростью электрона при вылете из катода. Тогда из закона сохранения энергии следует уравнение (2), связывающее скорость электрона  $v(x)$  и потенциал  $\phi(x)$  в точке  $x$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\phi, \quad (2)$$

где  $e$  – модуль заряда электрона, а потенциал принят равным нулю в точке  $x = 0$ .

В стационарном режиме плотность пространственного заряда  $\rho(x)$  не зависит от времени. Поэтому полный ток  $I$  через любое сечение диода должен быть одним и тем же:

$$I = jS = \rho vS = const, \quad (3)$$

где  $j = \rho v$  – плотность тока,  $S$  – площадь электродов. Исключив из уравнений (1)-(3) переменные  $\rho$  и  $v$ , приходим к дифференциальному уравнению, определяющему потенциал  $\phi(x)$  в диоде

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\phi}}, \quad (4)$$

где

$$a^2 = \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Электронный газ в облаке, окружающем катод, находится в состоянии, близком к тепловому равновесию, которое почти не нарушается, если ток через диод мал по сравнению с производительностью катода. За счет хаотичности тепловых

Направим ось  $ox$  перпендикулярно электродам диода с началом на катоде (рис.1). Если бы не было пространственного заряда, потенциал менялся бы линейно от катода к аноду (пунктир на рис.1). Наличие отрицательного пространственного заряда должно вызвать уменьшение (“провисание”) потенциала внутри диода. Чтобы найти потенциал, запишем уравнение Пуассона, которое для рассматриваемого одномерного случая имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

где  $\rho(x)$  – плотность заряда,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

Пренебрежем начальной тепловой скоростью электрона при вылете из катода. Тогда из закона сохранения энергии

скоростей в околокатодной области имеет место почти полный баланс между числом электронов, вылетающих из катода в электронное облако, и числом возвращающихся электронов. Этот баланс не будет нарушаться только тогда, когда напряженность электрического поля  $E_x$  у катода близка к нулю. (В действительности  $E_x$  должна быть немного меньше нуля, чтобы данное малое ускоряющее поле обеспечило при усреднении небольшое преобладание числа вылетающих из катода электронов для образования малого полного тока диода). Добавим это граничное условие к уравнению (4):

$$E(0) = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x \rightarrow 0} = 0. \quad (5)$$

Для решения дифференциального уравнения (4) умножим его правую и левую части на  $\frac{d\varphi}{dx}$  и воспользуемся соотношением  $\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2$ . Интегрируя полученное уравнение с учетом граничного условия (5), получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm 2a\varphi^{1/4}.$$

Интегрируя это уравнение (со знаком "+", т.к. по направлению к положительному аноду потенциал должен возрастать), и используя граничные условия  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi(D) = U$ , где  $U$  – напряжение, приложенное к диоду, получаем закон "трех вторых"

$$I = CU^{3/2}, \quad (6)$$

где постоянная  $C$  определяется выражением

$$C = A\varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{m}}, \quad A = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{S}{D^2}.$$

Этот закон остается верным и для электродов произвольной конфигурации, при этом от формы электродов зависит только безразмерный множитель  $A$ . Для диода с цилиндрическими концентрическими электродами можно показать, что

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{9} \pi \frac{l}{r_a}, \quad (7)$$

где  $l$  – длина анода. При выводе этого соотношения предполагалось, что радиус анода  $r_a$  много больше радиуса катода, а также что  $l \gg r_a$ , что позволило пренебречь краевыми эффектами.

Измеряя экспериментально зависимость  $I(U)$ , можно найти коэффициент  $C$ , из которого, зная размеры анода, можно определить удельный заряд электрона  $e/m$ .

## Метод магнетрона

Значение  $e/m$  может быть найдено по траектории электрона в заданном магнитном и/или электрическом поле. На этом основаны многочисленные методы определения отношения заряда к массе для заряженных элементарных частиц. Точность данных методов определяется, в основном, точностью определения параметров траектории.

Одним из вариантов этих методов является метод магнетрона, в котором используется движение заряженной частицы во взаимно перпендикулярных магнитном и электрическом полях. Магнетрон представляет собой цилиндрический диод, помещенный в продольное магнитное поле (рис.2а).

В отсутствие магнитного поля электроны, вылетающие с поверхности цилиндрического катода  $K$ , ускоряются радиальным электрическим полем и летят к аноду  $A$  по радиусам.

Магнитное поле действует на движущийся электрон с силой Лоренца

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

которая всегда перпендикулярна к направлению его скорости  $\mathbf{v}$ . Сила Лоренца не совершает работы, а только поворачивает вектор скорости, искривляя траекторию движения. Поэтому при наложении магнитного поля траектории электронов в диоде начинают искривляться и приобретают более сложный характер, начинаясь на катоде и кончаясь на аноде лампы. С ростом магнитного поля анодный ток сначала не меняется, поскольку, несмотря на искривление траектории, все электроны еще достигают анода (рис.2, случай 1).

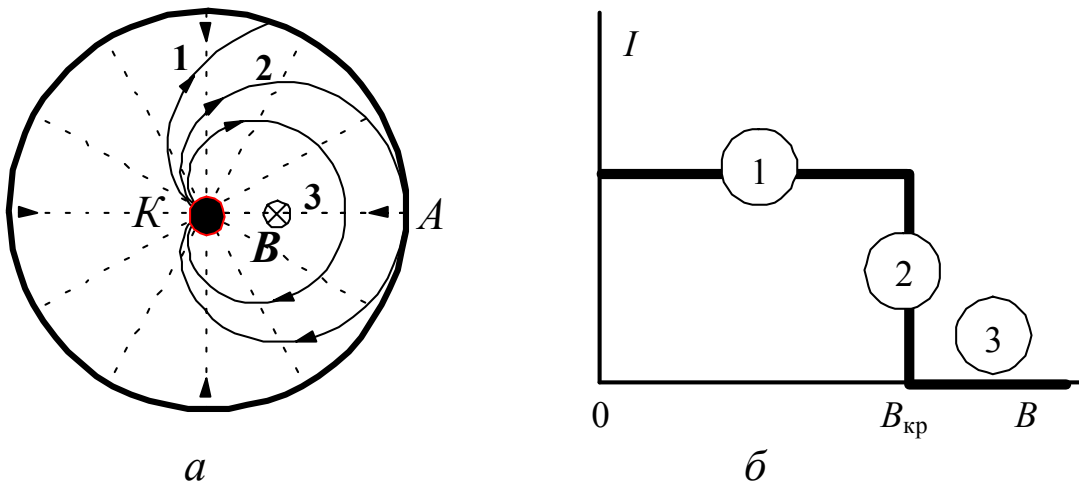


Рис. 2. Траектории электронов в магнетроне (а) и идеализированная зависимость анодного тока от индукции магнитного поля (б).

1.  $B < B_{кр}$ ; 2.  $B = B_{кр}$ ; 3.  $B > B_{кр}$ .  $K$  – катод,  $A$  – анод

При определенном критическом значении магнитной индукции  $B_{кр}$  электроны перестают достигать анода и анодный ток в лампе прекращается (рис.2, слу-

чай 2).

При  $B > B_{кр}$  электроны образуют в лампе объемный отрицательный заряд, который вращается в пространстве между катодом и анодом, но сила анодного тока при этом близка к нулю (рис.2, случай 3).

Таким образом, в данном методе сами траектории электронов не измеряются, но косвенно, по скачку анодного тока, фиксируется выход электронов на критическую траекторию с известными заранее параметрами. По параметрам этой траектории и рассчитывается удельный заряд  $e/m$ . Найдем величину критического поля.

Ввиду аксиальной симметрии электродов рассмотрим движение электронов в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  с началом в центре диода (рис.3).

По закону сохранения энергии скорость электрона у анода  $v_a$  определяется пройденной им разностью потенциалов  $U$  между анодом и катодом:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 = eU \quad (8)$$

(считаем, что начальная скорость электрона равна нулю).

Момент импульса электрона  $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  в нашей задаче имеет только  $z$ -компоненту. Рассмотрим его изменение. При вылете из катода момент импульса электрона равен нулю, т.к. скорость направлена по радиусу ( $L_{1z} = 0$ ).

При критическом значении индукции  $B_{кр}$  траектория электронов касается анода (рис.2, случай 2). В точке касания момент импульса

$$L_{2z} = m v_a r_a,$$

так как скорость направлена перпендикулярно к радиусу.

Изменение момента импульса электрона обусловлено только магнитной силой Лоренца, поскольку электрические силы направлены по радиусам и их момент всегда равен нулю. Момент сил Лоренца  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  имеет только  $z$ -компоненту:

$$M_z = r F_\varphi = r e v_r B = e B r \dot{r},$$

где  $F_\varphi = e v_r B$  – азимутальная компонента силы,  $v_r = \dot{r}$  – радиальная компонента скорости.

Закон изменения  $z$ -компоненты момента импульса имеет вид

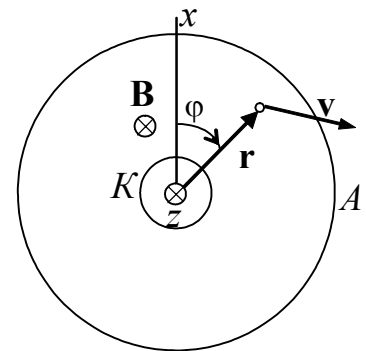


Рис.3 Система координат

$$\Delta L_z = L_{2z} - L_{1z} = \int_0^{\tau} M_z dt,$$

где  $\tau$  – время полета от катода до анода. Подставляя в него найденные выше соотношения, получаем

$$mv_a r_a = eB_{кр} \int_0^{\tau} r \dot{r} dt = eB_{кр} \int_{r_k}^{r_a} r dr,$$

где в последнем интеграле мы перешли к переменной интегрирования  $r$  и учли, что  $\dot{r} dt = dr$ . Интегрируя его, получаем

$$mv_a r_a = \frac{1}{2} eB_{кр} (r_a^2 - r_k^2), \quad (9)$$

где  $r_k$  – радиус катода. Исключая  $v_a$  из (8) и (9), получаем следующую связь между напряжением на диоде и критической индукцией магнитного поля

$$U = \frac{1}{8} \frac{e}{m} r_a^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r_a^2}\right)^2 B_{кр}^2. \quad (10)$$

Откуда находим

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{\left[r_a B_{кр} (1 - r_k^2 / r_a^2)\right]^2} \quad (11)$$

Если радиус катода мал по сравнению с радиусом анода ( $r_k \ll r_a$ ), то из (11) получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{r_a^2 B_{кр}^2} \quad (12)$$

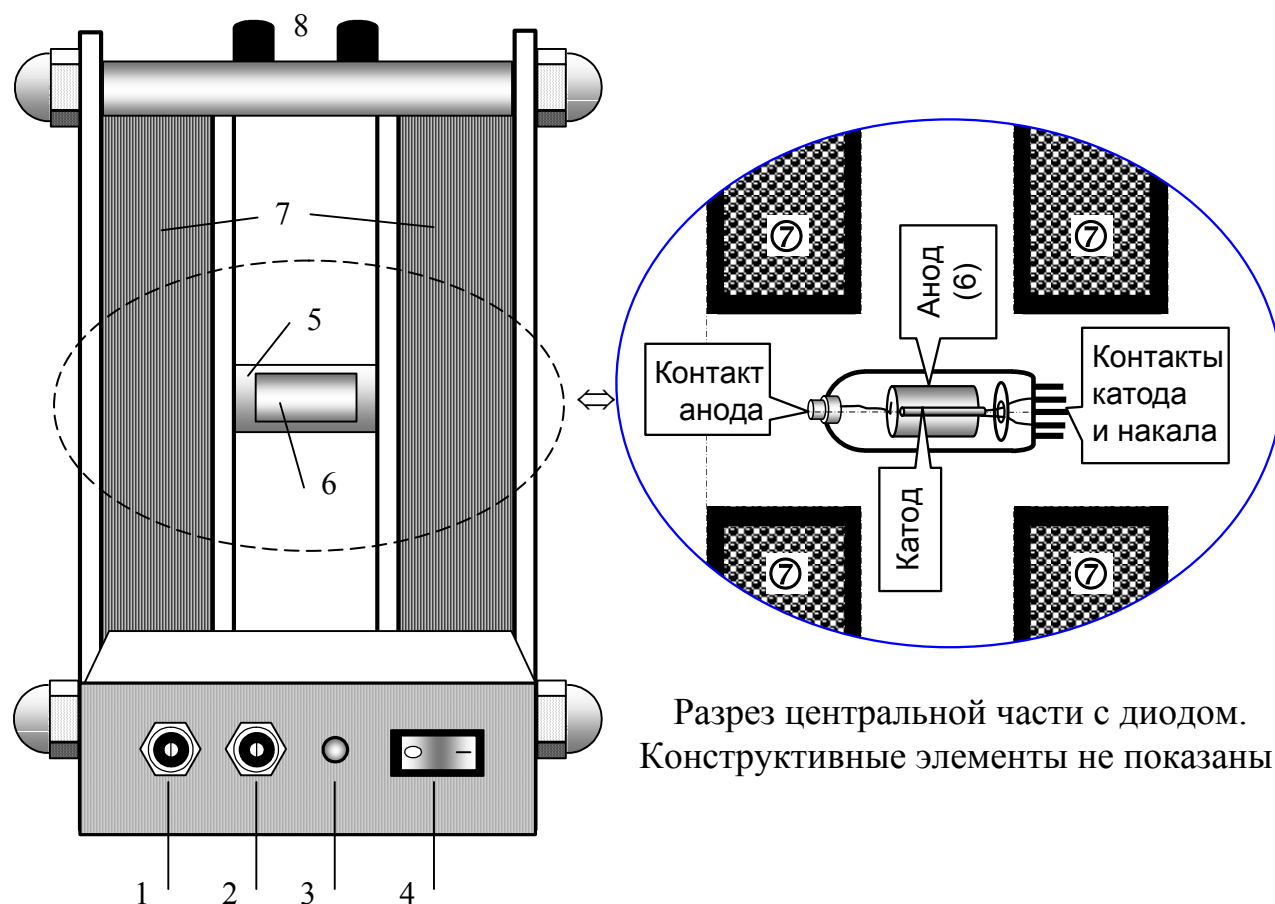
Таким образом, измерение критического поля  $B_{кр}$  для заданного напряжения на диоде  $U$  дает возможность сразу найти  $e/m$ .

### **Экспериментальная установка**

Для измерения обоими описанными выше методами используется одна и та же экспериментальная установка. В качестве цилиндрического вакуумного диода используется электронная лампа-диод типа 3Ц18П.

Конструкция измерительного модуля показана на *рис. 4*. Однородное магнитное поле, необходимое для метода магнетрона, создается системой из двух катушек Гельмгольца (7), посередине между которыми горизонтально закреплен диод (5).

С передней стороны измерительного модуля находится панель с выключателем (4), сигнальным светодиодом (3) и разъемами (1) и (2) для подачи на диод постоянного анодного напряжения 0-200 В и напряжения накала 3 В от внешних источников. С противоположной стороны модуля имеются клеммы (8) для подключения источника тока к катушкам Гельмгольца.



Разрез центральной части с диодом.  
Конструктивные элементы не показаны.

Рис.4 Измерительный модуль

- |                                     |                               |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1. Вход анодного напряжения 0-200 В | 2. Вход напряжения накала 3 В |
| 3. Индикаторный светодиод           | 4. Выключатель                |
| 5. Вакуумный диод                   | 6. Анод диода                 |
| 7. Катушки Гельмгольца              | 8. Клеммы катушек Гельмгольца |

Принципиальная схема электрических соединений на установке показана на рис.5, реальная монтажная схема соединений всех приборов показана в конце описания на рис.8 (стр. 15).

Подключение цепи накала и анодного напряжения осуществляется проводами со специальными разъемами разного диаметра, что обеспечивает нужную полярность анодного напряжения и исключает возможность ошибочного соединения. В разрыв цепи питания катод-анод последовательно подключается миллиамперметр для измерения анодного тока диода. Если источник анодного питания не имеет собственного вольтметра, то параллельно его выходным клем-



мам нужно подключить внешний вольтметр. В качестве внешнего вольтметра и миллиамперметра используются цифровые переносные мультиметры с автономным питанием.

Источник для питания колец Гельмгольца подключается к клеммам 8 (рис.4, 8). Ток катушек измеряется собственным цифровым амперметром источника.

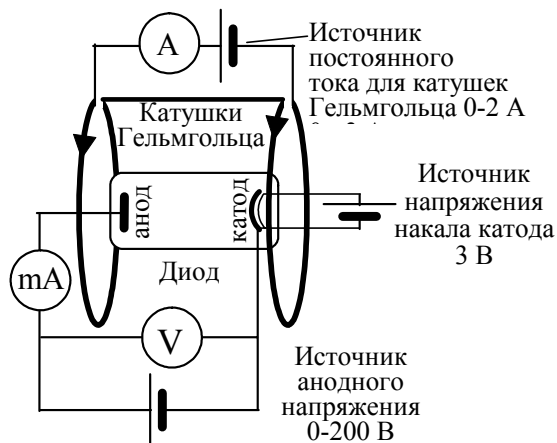


Рис.5 Принципиальная схема установки

### Правила техники безопасности.

**При включенных источниках напряжения никаких изменений в схеме производить нельзя.**

Блоки питания заземлены через сетевые евророзетки и не требуют отдельного заземления.

При выполнении работы источники напряжения включаются в последнюю очередь после полной сборки схемы и отключаются перед ее разборкой. До включения источников и перед их выключением регуляторы выходного напряжения должны быть установлены на нуль. Это особенно важно для источника тока катушек Гельмгольца. Размыкание их цепи при протекающем токе вызовет, ввиду большой индуктивности катушек, большую ЭДС самоиндукции, опасную для установки и для человека.

### **Методика измерений**

Измерительная схема, показанная на рис.5, 8, собирается сразу полностью, чтобы не менять соединения проводов по ходу задачи. В упражнении 1, для которого магнитное поле не требуется, источник питания катушек Гельмгольца остается присоединенным, но не включается.

Перед началом измерений после подачи напряжения накала лампы необходимо подождать 1-2 минуты до установления стабильной температуры катода. В разогреве катода можно убедиться визуально по его красному свечению (конец катода выходит за концы цилиндрического анода и хорошо виден).

При измерениях выбор диапазонов цифровых мультиметров происходит автоматически, но это можно сделать и вручную, учитывая, что ток через диод не превышает 40 мА, а максимальное напряжение на нем 200 В.

Упражнение 1.

**Проверка закона “трех вторых” и измерение удельного заряда электрона**

**Измерения и обработка результатов.** Снимается зависимость анодного тока от анодного напряжения на диоде  $I_a(U)$  для величин напряжений  $U$  от 0 до 150 В (с шагом 10 В). Результаты заносятся в таблицу. При каждом изменении напряжения необходимо подождать, пока ток через диод стабилизируется.

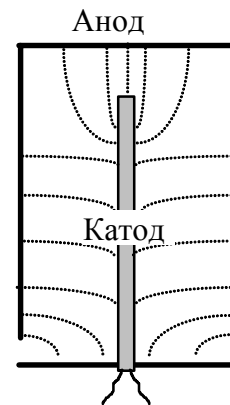
Таблица 1. Вольтамперная характеристика диода

$U, \text{В}$	$I, \text{мА}$	$U^{3/2}$

По полученным значениям строится график  $I_a(U^{3/2})$ . Если закон “трех вторых” (6) выполняется, этот график должен быть близок к прямой линии. Параметры этой прямой лучше всего найти методом наименьших квадратов, но это можно сделать и графически, проведя на диаграмме прямую линию максимально близко к экспериментальным точкам. Тангенс наклона данной прямой и является коэффициентом  $C$  в формуле (6).

Как указывалось выше, формула (7) для цилиндрического диода не учитывает краевых эффектов на концах катода и анода. Она справедлива, если отношение длины к радиусу анода достаточно велико. Для используемого в задаче фабричного серийного диода данное приближение выполняется плохо. В нашем диоде анод представляет собой цилиндр, у которого один торец (верхний) закрыт, а второй (нижний на *рис.б*), открыт. Кроме этого внизу, вблизи анода, находится диск, соединенный с катодом. Это сильно меняет картину силовых линий внутри диода, которая приблизительно показана на *рис.б*.

Все это не мешает действию закона “трех вторых”, который имеет место при любой форме электродов. Однако численное значение безразмерного множителя  $A$  будет отличаться от указанного в (7). Для данной лампы  $A \approx 2.85$ .



*Рис.б* Разрез диода и примерная картина электрических силовых линий внутри него

Упражнение 2.

**Измерение удельного заряда электрона методом магнетрона**

**Измерения.** Для двух фиксированных напряжений на аноде  $U = 150$  и  $200$  В измеряется величина тока через диод  $I_a$  в зависимости от тока  $I$  в катушках Гельмгольца  $I_a(I)$  в интервале  $I = 0 - 2$  А. Наиболее тщательно нужно промерить начальную область спада анодного тока, поскольку именно по ней определяется  $V_{кр}$ . Поэтому, начиная с тока катушек 1 А, нужно увеличивать ток с шагом не более 0,1 А. Измерения при максимальных токах 1,5 - 2 А нужно проводить достаточно быстро, чтобы избежать перегрева катушек. По этой причине при перерыве в измерениях ток через катушки необходимо выключать.

Результаты первичных измерений нужно занести в таблицу. В таблице 2 показан пример регистрации экспериментальных данных.

Таблица 2. Ток через диод в зависимости от тока катушек Гельмгольца.

$U, В$	№ эксп. точек	$I, А$	$I_a$ мА
150	1		
	2		
200	1		

Для нахождения  $V_{кр}$  по измеренным результатам надо построить график анодного тока диода в зависимости от тока катушек  $I_a(I)$ .

Необходимо отметить, что экспериментальные зависимости  $I(I_{кат})$  будут далеки от идеальной зависимости, показанной на рис.2 б. После участка спада ток диода не обращается в нуль, а сохраняется на уровне 30–40% от первоначального тока, который был при отсутствии магнитного поля. Данную особенность можно объяснить особенностями формы электродов диода. Как видно из рис.б, при наличии в диоде продольных z-составляющих электрического поля часть электронов, выходящих из верхнего конца катода, попадает не на боковые стенки, а на верхний глухой торец анодного цилиндра. Магнитное поле, заворачивая траектории электронов от боковых стенок, никак не может перекрыть поток данных “продольных” электронов.

Другим обстоятельством, искажающим указанную зависимость, связано с конструктивной особенностью данного диода. В пространстве между катодом и

анодом в нем продольно расположены две металлические проволоки, поддерживающие катод и имеющие потенциал катода. Силовые линии электрического поля в окрестности проволок сильно искажаются, и в результате теряется радиальная симметрия силовых линий, предполагаемая в теоретическом расчете. Поэтому у электронов, вылетающих из разных точек катода под разными углами относительно плоскости, в которой лежат эти проволоки и катод, будут разные траектории, поэтому будут разными и критические поля, что растягивает область спада.

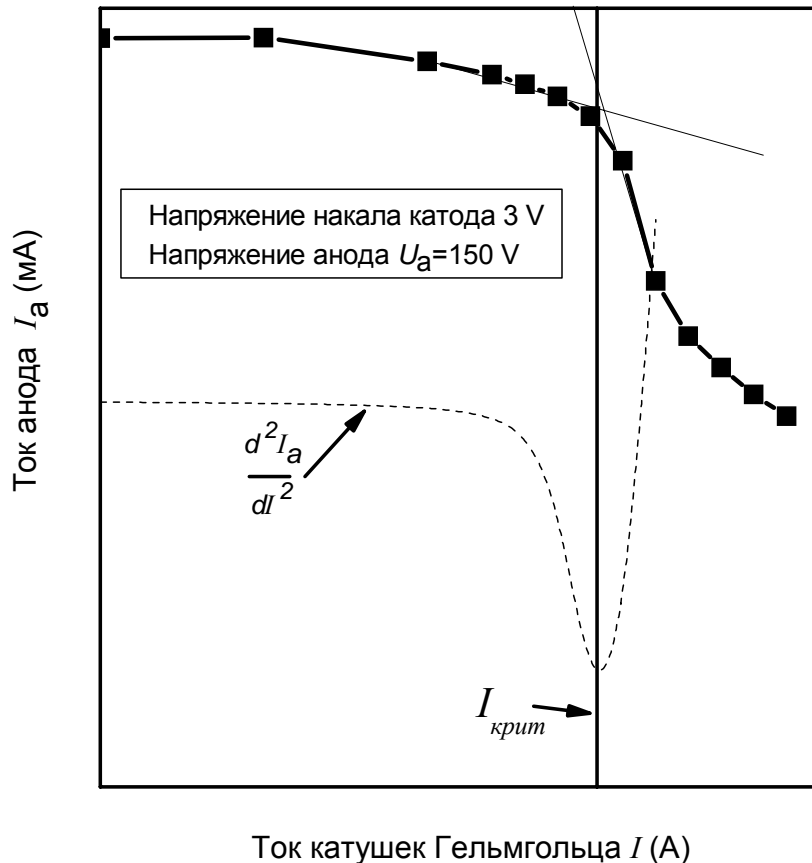


Рис. 7. Примерный ход экспериментальной зависимости тока диода от тока в катушках Гельмгольца (точки и сплошная линия). Пунктир – вторая производная от графика.

Минимальное критическое поле, соответствующее рассмотренной теории, будет у электронов, чья траектория проходит вдали от проволок. Эти электроны и вызовут на графике первоначальный спад анодного тока. Поэтому для определения критического поля нужно найти по графику эту точку начала загиба графика вниз.

Математически условие начала загиба графика соответствует экстремуму его второй производной. Типичный ход экспериментальной зависимости  $I_a(I)$  для указанной лампы вместе с графиком ее второй производной показан на рис.7 (эта производная отрицательна).

При ручной обработке графика эту точку можно приблизительно найти как абсциссу точки пересечения касательной, проведенной по начальному участку графика, и касательной, построенной на участке максимальной крутизны спада (см. рис. 7).

Для измеренной величины критического тока надо рассчитать критическую магнитную индукцию  $B_{кр}$ , учитывая, что магнитная индукция в катушках Гельмгольца пропорциональна силе тока  $B = kI$ . Коэффициент пропорциональности указан на катушках, входящих в экспериментальную установку. Если не указано иначе, можно взять  $k \approx 108 \cdot 10^{-4}$  Тл/А.

Далее нужно рассчитать величины  $e/m$  по формуле (11) для обоих напряжений на диоде, используя следующие геометрические параметры диода

Радиус катода  $r_k$             0.45 мм

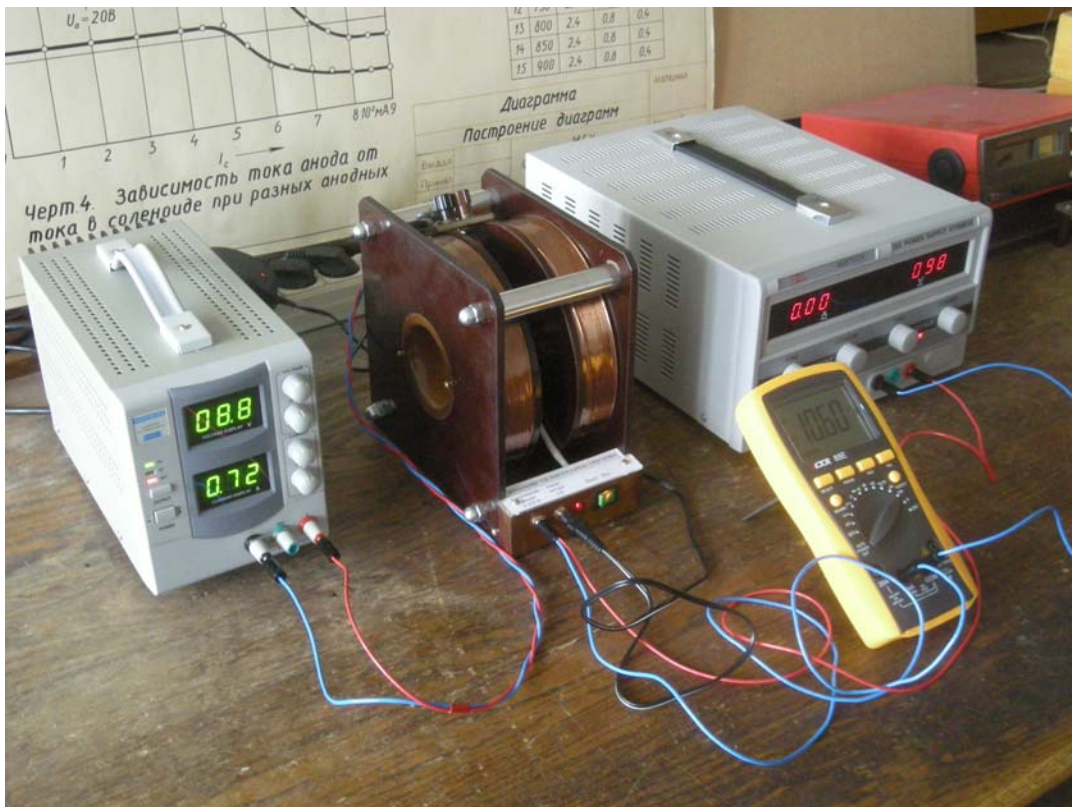
Радиус анода  $r_a$             5.5 мм

Сравните оба результата с известным значением  $e/m$  для электрона. Причиной их отличия может быть связана с тем, что 1) рассмотренная теория не учитывает теплового движения электронов; 2) в качестве радиуса катода в формуле (11) нужно фактически брать большую величину, определяемую радиусом электронного облака вокруг катода (виртуального катода). 3) Ввиду наличия проволок-держателей катода, поле не имеет осевой симметрии, предполагаемой в теории. Влияние этих факторов уменьшается с ростом  $U$ , поэтому в данном упражнении измерения проводятся при напряжениях, максимальных для данной лампы.

### **Литература**

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М., Высшая школа, 1983, § 34.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. § 101.

## Приложения



Общий вид экспериментальной установки

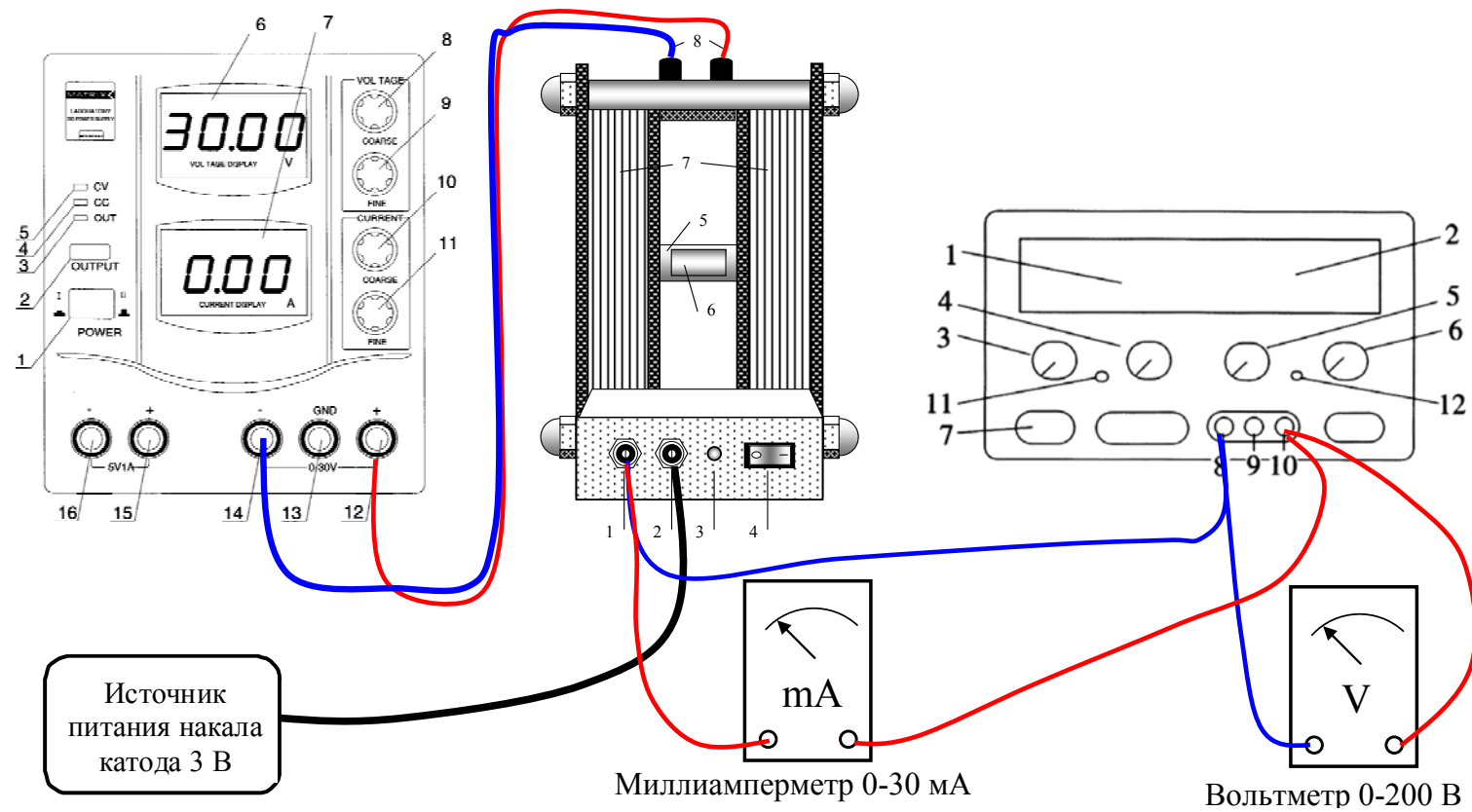


Рис.8 Схема электрических соединений на установке

Источник 0-30 В для питания катушек Гельмгольца

- |                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| 1. Выключатель питания    | 6. Индикатор напряжения      |
| 7. Индикатор силы тока    | 8. Напряжение выхода (грубо) |
| 9. Напряж. выхода (точно) | 9. Макс. сила тока (грубо)   |
| 14. Выход (-)             | 12. Выход (+)                |

Источник 0-200 В для питания анодной цепи диода

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 7. Выключатель питания       | 1. Индикатор силы тока       |
| 2. Индикатор напряжения      | 6. Напряжение выхода (грубо) |
| 5. Напряжение выхода (точно) | 4. Макс. сила тока (грубо)   |
| 9. Выход (-)                 | 10. Выход (+)                |