

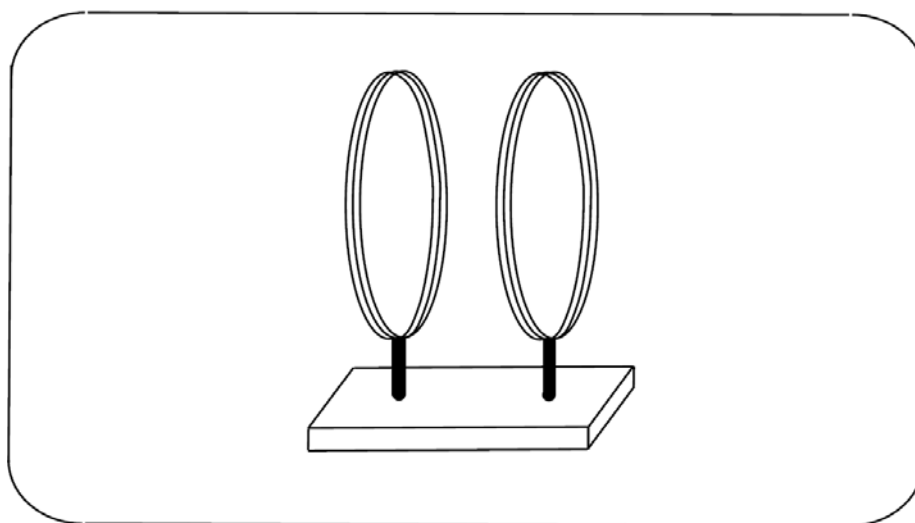


**Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова**

**Лабораторный практикум по общей физике**

**Электричество и магнетизм**

**Катушки Гельмгольца**



**МОСКВА 2008**

# Катушки Гельмгольца

**Цель работы:** Изучение лабораторных методов получения и измерения однородных магнитных полей.

## Теоретическое введение

Получение однородного магнитного поля в определенном объеме – это задача, часто встречающаяся как в постановке физического эксперимента, так и для обеспечения работы ряда электронных устройств. В зависимости от требуемой величины магнитной индукции  $B$ , размеров рабочей области, расходуемой мощности, веса и конструктивных требований эта проблема решается разными способами. Магнитное поле может быть создано с помощью катушек с током, электромагнитов и постоянных магнитов. Постоянные магниты не требуют энергозатрат, но не дают возможности эффективно и просто управлять величиной магнитного поля. Величина получаемой магнитной индукции для них определяется остаточной намагниченностью материала магнита и для разных материалов может иметь разные значения до величин порядка тесла. Постоянные магниты широко применяются в электронной технике в приборах, где требуется неизменное поле определенной величины. В лабораторной практике, где энергозатраты не являются главным критерием, а важно удобство управления, более распространены первые два метода. Рассмотрим особенности их применения.

Для получение относительно слабых полей порядка десятков-сотен миллитесла вплоть до 0.1 Тл чаще всего используются катушки с током, при этом поле высокой степени однородности можно получить, используя соленоид или катушки Гельмгольца. При данных значениях поля необходимые токи невелики и легко обеспечиваются простыми лабораторными средствами.

Поля средней интенсивности порядка 0.1 - 1 Тл получить предыдущим способом труднее, поскольку токи при этом пропорционально возрастают, а рассеиваемая тепловая мощность и мощность источников питания растет как

квадрат тока, что и порождает ряд технических проблем. Для получения таких полей в лабораторной практике широко используются электромагниты, т.е. катушки с током, одетые на ферромагнитный сердечник с зазором, чаще всего железный. Как известно, относительная магнитная проницаемость железа может достигать нескольких тысяч. Таким образом, сравнительно малым током можно вызвать большую намагниченность сердечника и получить в зазоре электромагнита магнитное поле с индукцией на несколько порядков большей, чем в его отсутствие. Физическим ограничением для получения сильных полей данным методом является величина намагниченности насыщения магнетика, достигая которую магнетик перестает вносить дальнейший вклад в величину индукции магнитного поля.

По этой причине для получения сильных магнитных полей порядка десятков тесла применение магнитных сердечников не дает никакого выигрыша, поскольку требуемые поля намного превосходят намагниченность насыщения всех известных магнетиков. Поэтому для получения сильных полей используются только катушки с током. Проблемы мощности решаются либо применением кратковременного, импульсного, режима работы, либо использованием сверхпроводящих катушек. Подобно постоянным магнитам, сверхпроводящие магниты после возбуждения поля теоретически не требуют дальнейшего энергоснабжения. Однако значительная мощность должна тратиться на охлаждение обмоток, поскольку известные в настоящее время и пригодные к изготовлению катушек материалы обладают сверхпроводимостью только при низких, криогенных температурах.

В данной работе изучаются магнитные поля катушек Гельмгольца с использованием датчика на эффекте Холла.

***Катушками Гельмгольца*** называется система из двух одинаковых катушек, расположенных соосно на расстоянии, равном их радиусу. В пространстве между катушками получается поле высокой однородности, причем, в отличие от соленоида, доступ в рабочую область открыт со всех сторон. Платой за это

удобство является проигрыш в величине поля при том же токе и числе витков. Магнитную индукцию в центре системы можно рассчитать по формуле

$$B = \mu_0 \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^3 \frac{IN}{R}, \quad (1)$$

где  $N$  – общее число витков двух катушек,  $I$  – сила тока через катушки,  $R$  – средний радиус катушки. Проанализируем принцип работы катушек Гельмгольца.

Рассмотрим сначала систему из двух одиночных витков радиуса  $R$ , соосно расположенных по оси  $z$  на расстоянии  $d$  друг от друга (рис. 1). Как легко получить из закона Био и Савара, поле на оси одиночного витка радиуса  $R$  с током силой  $I$  в точке  $A$  на расстоянии  $z$  от его плоскости определяется формулой

$$B_1(z, R) = \frac{1}{2\pi} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

В нашем случае направление тока в обеих катушках одинаково и поле на оси между ними является суммой полей от каждой из них

$$B(z, R) = B_1(z, R) + B_1(d - z, R).$$

Здесь во втором слагаемом учтено, что расстояние от точки с координатой  $z$  до второй катушки составляет  $d - z$ . Чтобы выяснить степень зависимости этого поля от координаты  $z$ , рассмотрим производные от  $B(z, R)$  по  $z$ . Чем больше порядок производных, обращающихся в нуль в данной точке, тем однороднее поле в ее окрестности.

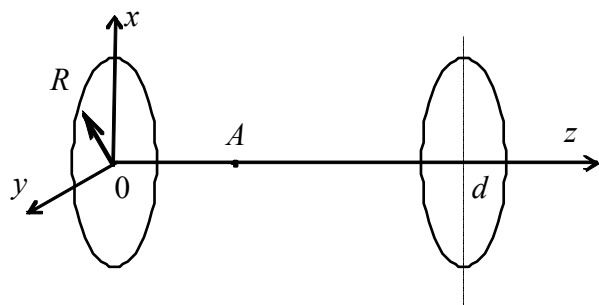


Рис. 1

Поскольку функция (2) четная, т.е.  $B_1(z) = B_1(-z)$ , ее производные нечетного порядка ( $n_1 = 1, 3$  и т.д.) являются нечетными функциями:

$$B_1^{(n_1)}(z, R) = -B_1^{(n_1)}(-z, R). \quad \text{Поэтому}$$

посередине между кольцами в точке  $z = d/2$  все нечетные производные от  $B(z,R)$  обращаются в нуль:

$$B^{(n_1)}(d/2, R) = B_1^{(n_1)}(d/2, R) + B_1^{(n_1)}(-d/2, R) = 0.$$

Производные четного порядка  $n_2 = 2, 4, \dots$  от функции (2) наоборот, являются функциями четными:  $B_1^{(n_2)}(z, R) = B_1^{(n_2)}(-z, R)$ . Поэтому четная производная от  $B(z,R)$  в точке  $z = d/2$  вдвое больше, чем для одного витка:  $B^{(n_2)}(z, R) = 2B_1^{(n_2)}(z, R)$ . Начнем со второй производной. Дифференцируя (2) два раза получаем:

$$B^{(2)}(z, R) = 2B_1^{(2)}(z, R) = 6 \frac{\mu}{2\pi} I \frac{R^2(4z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{7/2}}.$$

Эта функция обращается в нуль в точке  $z = R/2$ . Учитывая полученное выше условие  $z = d/2$ , получаем для колец Гельмгольца известное соотношение для получения наилучшей однородности поля, а именно, что расстояние между ними должно равняться радиусу:

$$d = R.$$

К сожалению, четвертая и последующие четные производные уже не равны нулю в данной точке. Поэтому изменение поля при отклонении от нее на  $\Delta z$  будет определяться следующим первым ненулевым членом ряда Тейлора

$$\Delta B(\Delta z) = \frac{1}{4!} B^{(4)}(d/2, d) \cdot (\Delta z)^4.$$

Поскольку само поле в этой точке  $B(d/2, d) \propto d^{-1}$ , а  $B^{(4)}(d/2, d) \propto d^{-5}$ , то относительное изменение поля будет иметь четвертый порядок малости по относительному смещению от центра системы  $\frac{\Delta B}{B} \propto \left(\frac{\Delta z}{d}\right)^4$ . Таким образом,

поле на оси системы действительно обладает высокой степенью продольной однородности. Графически результат сложения полей  $B_1$  и  $B_2$  от двух колец Гельмгольца показан на *рис. 2*.

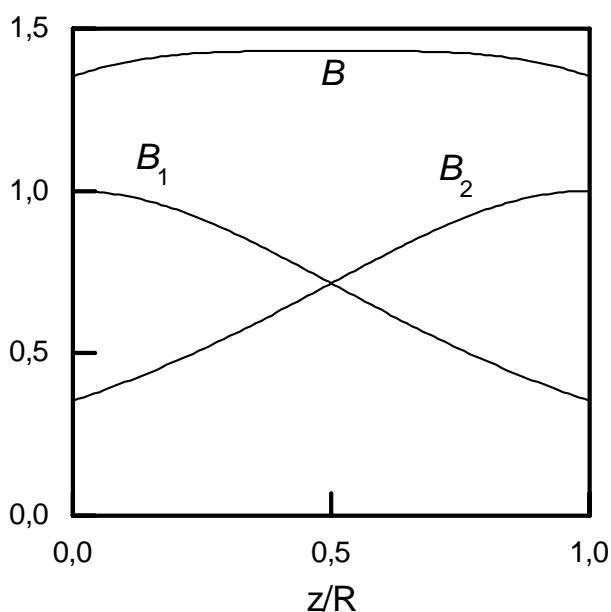


Рис.2 Магнитное поле между кольцами Гельмгольца.  
 $B_{1,2}$  – поля 1 и 2 катушек;  
 $B$  – суммарное поле

Более сложные расчеты, которые мы здесь не приводим, показывают, что однородность поля будет сохраняться и в поперечном направлении. Таким образом, поле однородно в значительной части всего объема между катушками.

Данный результат получен для двух бесконечно тонких витков. Но реально использовать систему из двух витков нельзя, так как величина тока, необходимая для получения даже небольших полей, будет слишком

велика. Так как величина поля пропорциональна полному току через сечение кольца, то есть произведению силы тока на число витков, то реально применяются катушки с большим числом витков и с пропорционально меньшими токами. При этом катушки получаются большими, соизмеримыми с размерами всей системы. Очевидно, что увеличивать число витков за счет удлинения катушки по оси  $z$  нецелесообразно, так как это увеличивает поле внутри катушки, а не в рабочей области между ними. Поэтому обычно катушки изготавливаются со значительной радиальной толщиной от  $R_1$  до  $R_2$ , но с малой по сравнению с радиусом толщиной  $h$  по оси  $z$  ( $h \ll R$ ). Рассмотрим, как отразятся размеры катушек на полученных выше условиях однородности магнитного поля.

В силу симметрии системы относительно точки  $z = d/2$  все нечетные производные магнитной индукции автоматически будут равны нулю, как и в случае одиночных витков. Вторым условием было обращение в нуль второй производной в данной точке. Равенство нулю второй производной означает, что модуль первой производной максимален, то есть в данной точке поле спадает

наиболее круто с удалением от катушки (см. рис.3, кривая  $B_1$  в точке  $z = d/2$ ). Для тонких катушек с  $h \ll R$  такая точка на оси  $z$  с максимальной крутизной спада всегда находится вне пределов катушки на некотором расстоянии  $R_{эф}$  от ее центра. Поэтому и для больших катушек условиям однородности поля можно удовлетворить, однако располагать катушки нужно уже на расстоянии “эффективного” радиуса  $R_{эф}$ , который теперь зависит от  $R_1$ ,  $R_2$  и  $h$ . Определить это расстояние можно либо точным расчетом, либо экспериментально.

### Измерение магнитного поля с помощью эффекта Холла.

Для измерения индукции магнитного поля широкое применение находят датчики на основе эффекта Холла. Этот эффект состоит в возникновении поперечного электрического поля в проводнике с протекающим током при приложении магнитного поля, перпендикулярного к направлению тока. Рассмотрим прямоугольный проводник с электрическим током плотности  $j$ , текущим вдоль оси  $ox$  (рис.3). При приложении поперечного магнитного поля с индукцией  $B$  вдоль оси  $oz$  на движущиеся заряды сразу начинает действовать

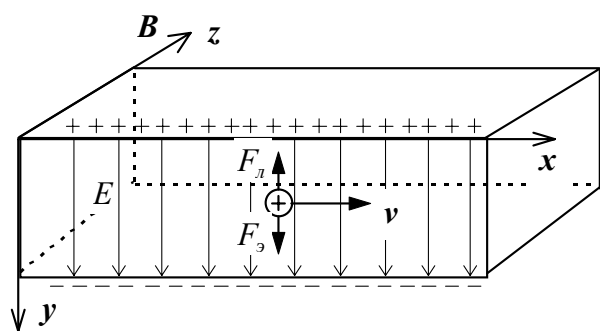


Рис.3

сила Лоренца  $F = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , направленная перпендикулярно к скорости  $\mathbf{v}$ , в нашем случае вверх. В первый момент она вызывает смещение всех зарядов вверх, благодаря чему на верхней поверхности появляется положительный поверхностный заряд, на нижней – отрицательный. Эти заряды порождают электрическое поле  $E$ , такое, что электрическая сила  $F_3 = qE$  полностью компенсирует силу Лоренца, и все заряды дальше будут двигаться строго по оси  $ox$ . Приравнивая эти силы, получаем  $E = vB$ .

Электрическое поле вызывает появление разности потенциалов между верхней и нижней поверхностью  $U = Ed = vBd$ , которая прямо пропорциональна

индукции поля  $B$ . Это напряжение – ЭДС Холла – можно измерить вольтметром, шкалу которого можно проградуировать в единицах магнитной индукции. Поскольку ЭДС прямо пропорциональна также и току  $I$  через проводник ( $\nu \propto I$ ), при всех измерениях ток должен быть строго определенной величины.

Обычно датчики Холла изготавливаются из полупроводников, где, в отличие от металлов, движение зарядов хорошо описывается приведенной выше классической (т.е. не квантовой) теорией и экспериментальная ЭДС Холла действительно с хорошей точностью прямо пропорциональна величине поля. Преимуществами датчиков Холла являются их малые размеры ( $1 \text{ мм}^2$  и менее) и очень малая инерционность, что позволяет использовать их на высоких частотах до  $10^{10}$  Гц.

### **Экспериментальная установка**

Экспериментальная установка состоит из соленоида, катушек Гельмгольца и датчика Холла, которые могут закрепляться на опорах, скользящих по направляющему опорному рельсу со шкалой, позволяющей устанавливать их положение с точностью до миллиметра. Источник стабилизированного тока для создания магнитного поля и схема, обслуживающая датчик Холла, размещены в одном электронном блоке, питающемся от сети переменного тока 220 В. Датчик Холла подключается к блоку специальным разъемом. В комплект установки входят два цифровых мультиметра М-830В с отдельными блоками питания, один из которых используется как амперметр для измерения силы тока, создающего магнитное поле, а второй как вольтметр для измерения сигнала с датчика Холла, предварительно усиленного инструментальным усилителем постоянного тока с коэффициентом усиления 100.



## Методика измерений.

Датчик Холла, катушки Гельмгольца или соленоид устанавливаются на опорном рельсе и визуально ориентируются вдоль его оси, после чего закрепляются стопорными винтами. В процессе измерений датчик может перемещаться как вдоль рельса, так и в поперечном направлении. Высота установки всех элементов в держателях фиксирована и не требует регулировки. Электрическая схема установки показана на рис.4.

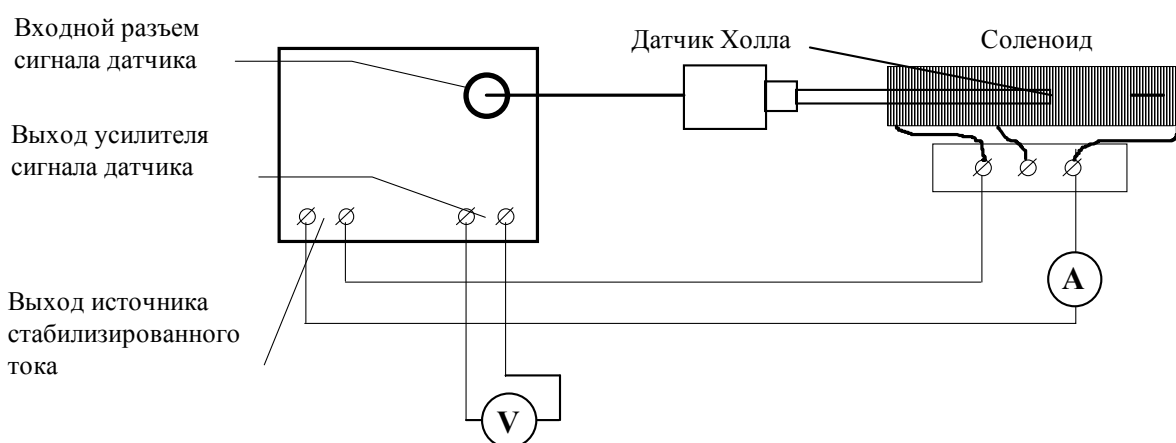


Рис. 4 Электрическая схема экспериментальной установки.

### Правила техники безопасности.

**При включенном источнике тока никаких изменений в схеме производить нельзя.**

*Блок питания включаются в последнюю очередь после сборки схемы и отключаются перед ее разборкой. До включения источников и перед их выключением регуляторы выходного тока должны быть установлены на минимум.*

### **Упражнение 1. Калибровка датчика Холла**

Для создания эталонного магнитного поля, необходимого калибровки датчика Холла, целесообразно использовать соленоид, поскольку необходимые для расчета индукции поля его геометрические размеры и плотность намотки – легко и точно измеряемые величины.

**Соленоидом** называется цилиндрическая катушка с обмоткой. Индукция поля на его оси определяется известной формулой (здесь и далее все формулы приводятся в системе единиц СИ)

$$B = 0.5\mu_0 nI(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (3)$$

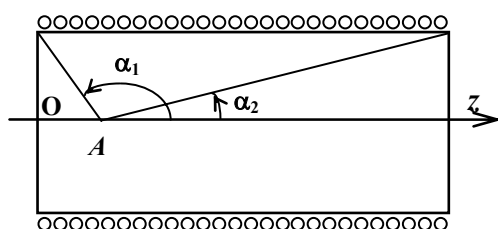


Рис.5

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.2566 \cdot 10^{-6}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $n$  – число витков на 1 метр длины соленоида,  $I$  – сила тока через катушку,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, под которыми видны концы соленоида из точки  $A$ , для которой ищется поле (рис.5). В

центре длинного соленоида с большим отношением длины к диаметру  $L/D \geq 10$  поле близко к предельному значению  $B = \mu_0 nI$  и характеризуется высокой степенью однородности как в продольном, как и в радиальном направлении.

Имеющийся соленоид имеет трехслойную намотку с плотностью  $n = 6000$  витков на метр, его длина  $L = 190$  мм и диаметр  $D = 20$  мм. Соленоид состоит из двух секций: секция 1 имеет длину 60 мм и секция 2 – длину 130 мм. Калибровку лучше проводить в центре максимально длинного соленоида с  $L = 190$  мм, поскольку с увеличением отношения  $D/L$  погрешности в измерении  $D/L$  меньше сказываются на расчете поля, так как входящие в формулу (3)  $\cos \alpha_1$  и  $\cos \alpha_2$  приближаются с ростом  $D/L$  к 1.

**Измерения и обработка результатов.** Помещаем датчик в центр соленоида, подключенного на максимальную длину 190 мм. Меняя ток  $I$  в соленоиде от 0.1 до 1.5 А, измеряем вольтметром напряжение  $U_\delta$  на выходе усилителя датчика Холла. Результаты записываем в таблицу и наносим на график  $U_\delta(I)$  на миллиметровой бумаге. Параметры этой прямой лучше всего найти методом наименьших квадратов, но это можно сделать и графически, проведя на диаграмме прямую линию максимально близко к экспериментальным точкам. Тангенс наклона данной прямой является коэффициентом пропорциональности между  $U_\delta$  и током  $I$ :

$$U_{\delta} = k_{UI} I. \quad (4)$$

Теперь можно найти и коэффициент пропорциональности между индукцией поля  $B$  и  $U_{\delta}$ . Из формулы (3) по приведенным выше параметрам соленоида рассчитываем теоретический коэффициент пропорциональности между индукцией магнитного поля в центре соленоида и током

$$B = k_{BI} I, \quad k_{BI} = \mu_0 n \cos \alpha, \quad (5)$$

где  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{L}$  (см. рис.1). Из (5) и (4) и находим искомый коэффициент

пересчета напряжения  $U_{\delta}$  с датчика Холла в величину магнитной индукции:

$$k = B/U_{\delta} = k_{BI}/k_{UI}.$$

Величина этого коэффициента и является окончательным результатом данного упражнения.

#### Образец оформления

Таблица 1 Калибровка датчика Холла в соленоиде с длиной  $L = 190$  мм.

Сила тока, $A$				
Напряжение датчика Холла, $B$				

*Экспериментальный коэффициент пропорциональности  $k_{UI} = U_{\delta}/I = \dots$*

*Теоретический коэффициент соленоида  $k_{BI} = B/I = \dots$*

*Калибровочный коэффициент датчика Холла  $k = B/U_{\delta} = \dots$*

### **Упражнение 2. Изучение поля катушек Гельмгольца**

В упражнении измеряется распределение поля одиночной катушки и системы катушек Гельмгольца при разных расстояниях между ними.

Устанавливаем на рельсе две катушки Гельмгольца и держатель с датчиком, который ориентируем точно по оси катушек. Сначала подаем ток 1 А только на одну катушку, ближайшую к датчику. Перемещая датчик с шагом 1 см, измеряем распределение поля  $B(z)$ , начиная от середины катушки и кончая расстоянием порядка 10 см после торца. Результаты записываем в таблицу и наносим на график на миллиметровой бумаге. На графике находим точку, где  $B(z)$  меняется наиболее круто (т.е. касательная в этой точке образует максимальный угол с

осью  $z$ ). Нужно найти расстояние от этой точки до центра катушки, которое и будет ее эффективным радиусом  $R_{эф}$ .

Далее нужно подключить к источнику тока вторую катушку последовательно с первой, соблюдая полярность (конец катушки 1 подсоединяется к началу катушки 2). Между центрами катушек установим расстояние  $d = R_{эф}$ , определенное выше. Передвигая датчик по рельсу с шагом 1 см, измеряем поле на оси между катушками, записывая результаты в таблицу. Аналогичные измерения надо провести еще для двух значений  $d$ , одно больше и другое меньше  $R_{эф}$  на 2 см. Все четыре измеренные зависимости надо построить на одном графике.

Для исследования поперечного распределения поля устанавливаем значение  $d$ , соответствующее наиболее однородному полю и помещаем датчик в центр системы колец. Смещая датчик по поперечной направляющей (ось  $ou$  на рис.1) от оси катушек с шагом 0.5 см до максимально возможного значения, записываем значения поля в таблицу и строим отдельный график  $B(y)$ .

## Литература

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М., Высшая школа, 1983, § 10, примеры 10.2-4, § 35, 38, 40.
2. Калашников С.Г. Электричество. М., Наука.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество.